

Лабораторная работа 4.1

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

4.1.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

Если периодическая несинусоидальная функция отвечает условиям Дирихле¹, она может быть представлена гармоническим рядом Фурье. Ряд Фурье в тригонометрической форме имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)). \quad (4.1)$$

Здесь $\omega_1 = (2\pi / T)$ – угловая частота первой гармоники. Коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad (4.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (4.3)$$

В формуле (4.1) $a_0 / 2$ – постоянная составляющая, равная среднему значению функции $f(t)$ за период:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (4.4)$$

В случае если периодическая функция обладает каким-либо видом симметрии, это облегчает разложение в ряд Фурье, поскольку некоторые гармоники могут отсутствовать. Например, разложение в ряд Фурье последовательности прямоугольных импульсов (рис. 4.1) содержит только нечетные гармоники:

$$f(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right).$$

Здесь U – амплитуда прямоугольных импульсов.

¹ Функция, отвечающая условиям Дирихле, имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов на конечном отрезке.

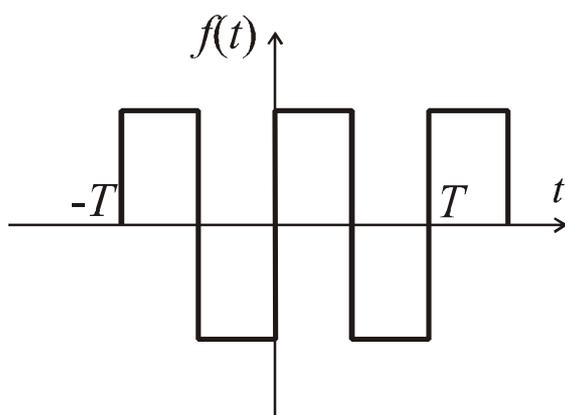


Рис. 4.1

Расчет линейной цепи при периодическом несинусоидальном воздействии основан на использовании принципа наложения. Он выполняется в три этапа.

На первом этапе выполняется разложение несинусоидального воздействия в ряд Фурье. В результате определяются амплитуды и начальные фазы гармоник.

На втором этапе производится расчет цепи для каждого из слагаемых гармонического ряда. Он не отличается от обычного расчета при синусоидальных воздействиях. Этот расчет повторяют столько раз, сколько гармоник необходимо сохранить для получения необходимой точности решения. При расчете цепи на действие отдельных гармонических составляющих следует пользоваться символическим методом.

Теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число слагаемых. Однако обычно он быстро сходится. Поэтому для получения требуемой степени точности достаточно рассмотреть небольшое число гармоник.

Далее частные решения, полученные на втором этапе, суммируются для того, чтобы определить форму искомых напряжений и токов. При необходимости рассчитываются действующие значения этих величин.

4.2. Комплексная форма ряда Фурье. Комплексный частотный спектр

Анализ линейных цепей при воздействии периодических сигналов несинусоидальной формы заключается в многократном расчете цепи при воздействии каждой гармоники в отдельности. Поскольку основным методом расчета цепей синусоидального тока является символический метод, ряд Фурье удобно представлять в комплексной форме. В этом случае мы можем использовать метод комплексных амплитуд для расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.

Представим функции $\sin(n\omega_1 t)$ и $\cos(n\omega_1 t)$ известными равенствами:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}; \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{j2}. \quad (4.5)$$

Подставив равенства (4.5) в соотношение (4.1), получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega_1 t}). \quad (4.6)$$

С помощью формул (4.2) и (4.3) нетрудно показать, что коэффициент a_n – четная, а b_n – нечетная функция индекса n , т. е. $a_n = a_{-n}$, $b_n = -b_{-n}$. Поэтому элемент $-jb_n$ можно рассматривать как слагаемое с отрицательным индексом. Изменив нижний предел суммирования в формуле (4.6) на $-\infty$, получим

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Здесь $\mathbf{A}_n = a_n - jb_n$ – комплексный коэффициент ряда Фурье. Представим \mathbf{A}_n в показательной форме: $\mathbf{A}_n = A_n e^{j\Psi_n}$. Здесь $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\Psi_n = -\arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

В соответствии с (4.3) при $n=0$ $b_0 = 0$ и $(a_n - jb_n)/2 = a_0/2$.

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (4.7)$$

Совокупность комплексных коэффициентов гармоник \mathbf{A}_n называют *комплексным частотным спектром* функции $f(t)$. Амплитуды гармоник A_n образуют *амплитудный спектр*, а начальные фазы Ψ_n – *фазовый спектр*.

Выведем теперь соотношение, определяющее комплексные амплитуды гармоник. В соответствии с (4.2) и (4.3)

$$\mathbf{A}_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos(n\omega_1 t) - j \sin(n\omega_1 t)) dt.$$

С помощью равенств (4.5) получим

$$\mathbf{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left(\frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} - \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2} \right) dt.$$

Из последнего выражения следует, что комплексный коэффициент ряда Фурье

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (4.8)$$

Если функция $f(t)$ – вещественная, то из формулы (4.8) следует, что комплексная амплитуда $A_{-n} = A_n^*$ комплексно-сопряженная, а амплитудный спектр – симметричный.

Если функция времени $f(t)$ обладает каким-либо видом симметрии, определение комплексных коэффициентов ряда упрощается.

Пример 4.1. Найти комплексный частотный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов единичной амплитуды (рис. 4.6). Длительность импульса равна τ , период повторения T .

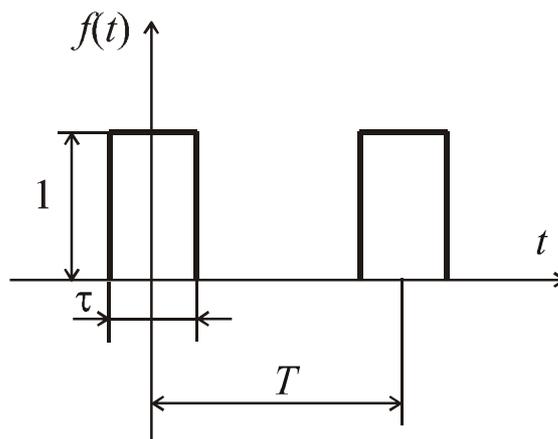


Рис. 4.6

В соответствии с (4.8) комплексные коэффициенты гармоник

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2\tau \sin(k\omega_1 \tau/2)}{T k\omega_1 \tau/2}.$$

Здесь k – порядковый номер гармоники. Из последней формулы следует, что амплитуды гармоник изменяются по закону $\sin x/x$. Учитывая, что $\omega_1 = 2\pi/T$, получим

$$A_k = \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi\tau/T).$$

Узлы огибающей амплитудного спектра соответствуют тем номерам гармоник, при которых функция $\sin(k\pi\tau/T)$ обращается в нуль. Амплитудный спектр для случая, когда отношение длительности импульса к периоду равно $1/4$, показан на рис. 4.7. Пунктиром обозначена огибающая амплитудного спектра. На рис. 4.8 показан фазовый спектр рассматриваемой функции времени.

Для рассматриваемого случая ($t/T = 1/4$) узлы огибающей расположены на частотах, соответствующих гармоникам с порядковыми номерами $k = 4n$, $n = 1, 2, \mathbf{K}$. Аргументы A_k равны нулю в тех интервалах, где синус положителен, либо равны π в интервалах, где синус отрицателен. Число гармоник в интервале между узлами огибающей равно T/τ . С увеличением периода линии спектра располагаются гуще, их число в интервале увеличивается, а амплитуды уменьшаются. Однако частоты узлов, а следовательно, и форма огибающей зависят только от длительности импульсов t . Можно показать, что угловые частоты, соответствующие узлам огибающей, кратны отношению $2\pi/t$.

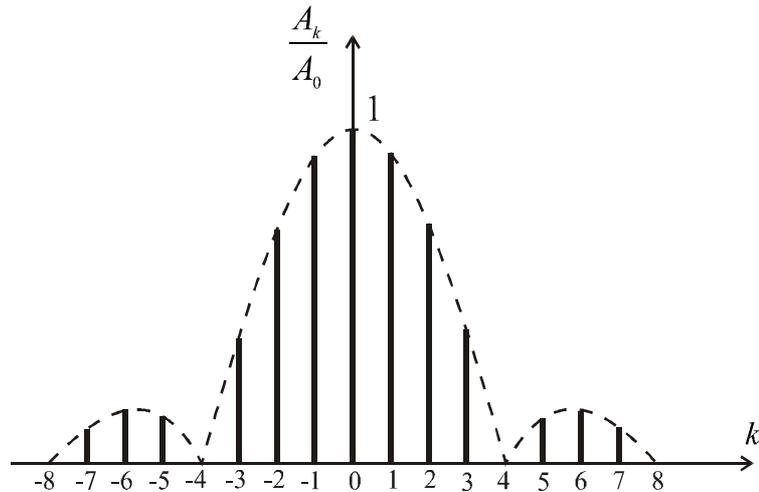
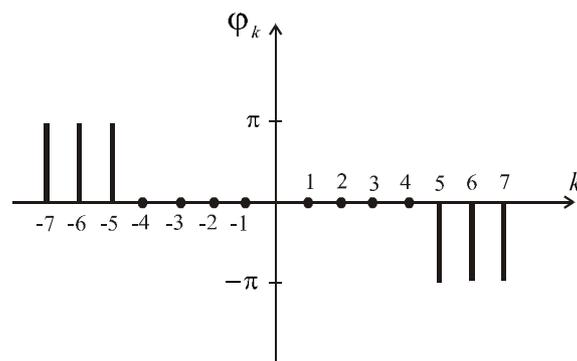


Рис. 4.7



Часто при изображении амплитудных спектров откладывают не амплитуды гармоник, а их относительные значения, равные отношению амплитуд соответствующих гармоник к постоянной составляющей или первой гармонике. Это позволяет сохранить масштаб по оси ординат одинаковым при изменении периода T .

Рекомендуемая литература

1. Новожилов, О. П. Электротехника и электроника: учебник / О. П. Новожилов. – М.: Гардарики, 2008. – 653 с.
2. Бакалов, В. П. Основы теории цепей: учебник для вузов / В. П. Бакалов, В. Ф. Дмитриков, Б. И. Крук. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.
3. Атабеков Г. И. Основы теории цепей: Учебник. 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 432 с.
4. Довгун, В. П. Электротехника и электроника: учеб. пособие: в 2-х ч. Ч. 1 / В. П. Довгун. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2006. – 270 с.
5. Матханов, П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи / П. Н. Матханов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
6. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 544 с.