Лабораторная работа 2.3

Исследование переходных процессов в последовательном колебательном контуре

2.3.2. Переходный процесс в последовательном колебательном контуре – реакция при нулевом входе

Рассмотрим последовательную RLC-цепь, которая не содержит независимых источников (рис. 2.3.1). Будем считать, что емкостный элемент заряжен до напряжения $u_C(0)=U_0$, а начальный ток индуктивного элемента $i_L(0)=0$. Поскольку независимые источники в цепи отсутствуют, токи и напряжения в такой цепи являются реакцией при нулевом входном сигнале (*реакцией при нулевом входе*).

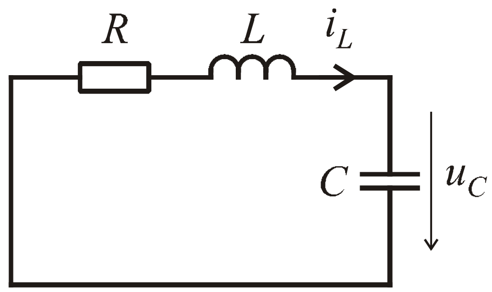

Рис. 2.3.1

В соответствии с вторым законом Кирхгофа

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i dt=0.$$

Продифференцировав обе части уравнения по времени, получаем

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0. \qquad (2.3.1)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=p^2+2a\,p+w_0^2=0.$$

Здесь $a=R/2L$ – *постоянная затухания* или *коэффициент демпфирования*; $w_0=1/\sqrt{LC}$ – *частота собственных колебаний цепи*.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - w_0^2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}\,.$$

Каждый из корней дает независимое решение, поэтому решение дифференциального уравнения (2.3.1) имеет вид

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\,. \qquad (2.3.2)$$

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $i(t)$ и $\frac{di(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0+$:

$$i(0) = A_1 + A_2\,; \qquad (2.3.3)$$

$$\frac{di(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2\,. \qquad (2.3.4)$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 необходимо знать начальные условия: значение тока и его первой производной при $t = 0+$.

Примем начальный ток индуктивного элемента равным нулю, а начальное напряжение емкостного элемента $u_C(0) = U_0$. Учитывая, что

$$\frac{di(0_+)}{dt} = \frac{u_L(0+)}{L},$$

найдем первую производную тока при $t = 0+$:

$$\frac{di(0_+)}{dt} = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Решая уравнения (2.3.3) (2.3.4), найдем постоянные интегрирования

$$A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}\,.$$

Форма переходных токов и напряжений зависит от вида корней характеристического уравнения. Рассмотрим важные для практики случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные ($\alpha > \omega_0 > 0$).

В соответствии с (2.3.2) ток в цепи

$$i_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right).. \qquad (2.3.5)$$

Аналогичным образом можно найти закон изменения напряжения емкостного элемента $u_C(t)$. Графики $i(t)$ и $u_C(t)$ показаны на рис. 2.3.2.

Итак, при вещественных корнях характеристического уравнения токи и напряжения изменяются непериодически. Такой переходный процесс называют *апериодическим*.

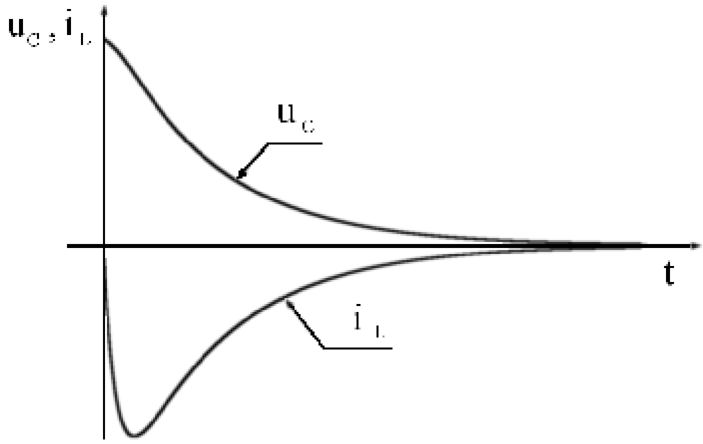

Рис. 2.3.2

Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Здесь $j = \sqrt{-1}$.

В соответствии с (2.3.2) ток

$$i_L(t) = -\frac{U_0 e^{\alpha t}}{j2\beta L}\left(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}\right) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Таким образом, если собственные частоты комплексные, в цепи возникают синусоидальные колебания, затухающие с течением времени (если $a < 0$). Такой переходный процесс называют *колебательным*. Графики тока $i(t)$ и напряжения $u_C(t)$ для случая комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения показаны на рис. 2.3.3.

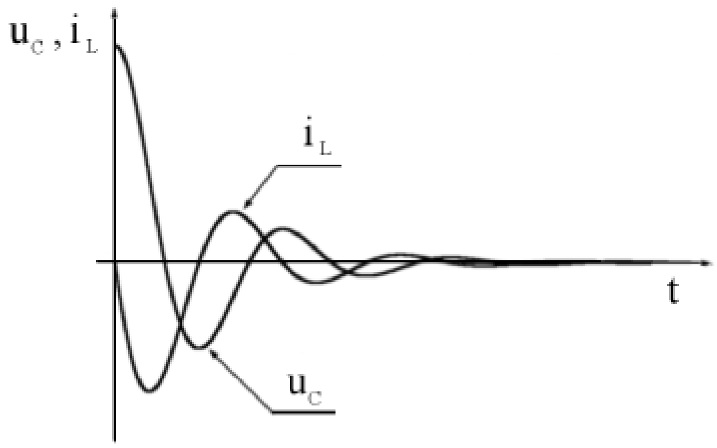

Рис. 2.3.3

2.3.2. Подключение последовательного колебательного контура к источнику постоянного напряжения

Рассмотрим процессы в последовательном колебательном контуре, показанном на рис. 2.3.1. На входе цепи в момент $t = 0$ включается источник постоянного напряжения *E*.

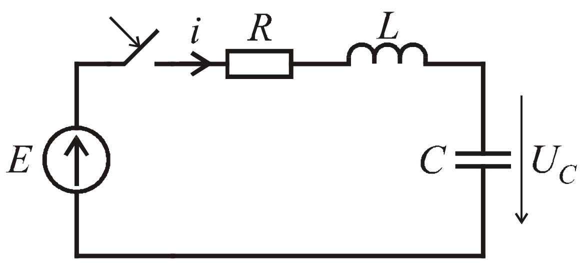

Рис. 2.3.4

Для цепи на рис. 2.3.4 справедливо уравнение

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = E . \qquad (2.3.6)$$

Примем, что независимые начальные условия нулевые, т.е. $u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$.

Продифференцировав левую и правую части (2.3.6), получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L\frac{d^2 i}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 .$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = p^2 + 2a\,p + w_0^2 = 0 .$$

Постоянная затухания $a = R/2L$, частота собственных колебаний $w_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - w_0^2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC} .$$

Решение уравнения (2.3.6) представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i(\infty). \qquad (2.3.7)$$

Поскольку в цепи действует источник постоянного напряжения, принужденная составляющая тока $i(\infty) = 0$.

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $i(t)$ и $\frac{di(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0+$:

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0 ;$$

$$\frac{di(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L} .$$

Решая эти уравнения, получим:

$$i_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right). . \qquad (2.3.8)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения переходный процесс будет иметь апериодический или колебательный характер.

Рекомендуемая литература

1.Бычков, Ю. А. Основы теории электрических цепей: учеб. для вузов / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002. – 464 с.

2. Бакалов, В. П. Основы теории цепей: учебник для вузов / В. П. Бакалов, В. Ф. Дмитриков, Б. И. Крук. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.

3. Атабеков Г. И. Основы теории цепей: Учебник. 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 432 с.

4. Довгун, В. П. Электротехника и электроника: учеб. пособие: в 2-х ч. Ч. 1 / В. П. Довгун. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2006. – 270 с.

5. Матханов, П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи / П. Н. Матханов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.

6. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. – М.: Радио и связь, 1986. – 544 с.

7. Башарин, С. А. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / С. А. Башарин, В. В. Федоров.– М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 304 с.