Лекция 8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

План

1. Введение.
2. Переходный процесс в последовательном колебательном контуре – реакция при нулевом входе.
3. Подключение последовательного колебательного контура к источнику постоянного напряжения.
4. Переходные процессы в параллельном колебательном контуре.
5. Заключение.

1. Введение

До сих пор мы рассматривали процессы в цепях с одним индуктивным или емкостным элементом. Поведение таких цепей описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Рассмотрим теперь цепи, которые содержат одновременно индуктивный и емкостный элементы. Процессы в таких цепях описываются уравнением второго порядка. Соответственно, их называют цепями второго порядка. Простейшими примерами цепей второго порядка являются последовательный и параллельный колебательные контуры.

Переходные процессы в цепях второго порядка существенным образом зависят от вида корней характеристического уравнения. Последние определяются конфигурацией цепи и значениями элементов и могут быть вещественными или комплексно сопряженными.

2. Переходный процесс в последовательном колебательном контуре – реакция при нулевом входе

Рассмотрим последовательную *RLC*-цепь, которая не содержит независимых источников (рис. 8.1). Будем считать, что емкостный элемент заряжен до напряжения $u_C(0)=U_0$, а начальный ток индуктивного элемента $i_L(0)=0$. Поскольку независимые источники в цепи отсутствуют, токи и напряжения в такой цепи являются реакцией при нулевом входном сигнале (*реакцией при нулевом входе*).

В соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i dt=0.$$

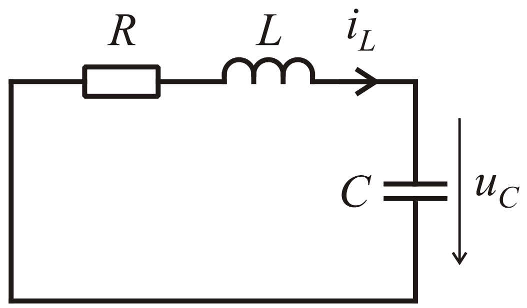

Рис. 8.1

Продифференцировав обе части уравнения по времени, получаем

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0. \tag{8.1}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=p^2+2\alpha p+\omega_0^2=0.$$

Здесь $\alpha=R/2L$ – *постоянная затухания* или *коэффициент демпфирования*; $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ – *частота собственных колебаний цепи*.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-R/2L\pm\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}.$$

Каждый из корней дает независимое решение, поэтому решение дифференциального уравнения (8.1) имеет вид

$$i(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}. \tag{8.2}$$

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $i(t)$ и $\frac{di(t)}{dt}$ в момент времени $t=0+$:

$$i(0)=A_1+A_2; \tag{8.3}$$

$$\frac{di(0_+)}{dt}=p_1A_1+p_2A_2. \tag{8.4}$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 необходимо знать начальные условия: значение тока и его первой производной при $t = 0+$.

Примем начальный ток индуктивного элемента равным нулю, а начальное напряжение емкостного элемента $u_C(0) = U_0$. Учитывая, что

$$\frac{di(0_+)}{dt} = \frac{u_L(0+)}{L},$$

найдем первую производную тока при $t = 0+$:

$$\frac{di(0_+)}{dt} = -\frac{U_0}{L}.$$

Решая уравнения (8.3) (8.4), найдем постоянные интегрирования

$$A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Форма переходных токов и напряжений зависит от вида корней характеристического уравнения. Рассмотрим важные для практики случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные ($\alpha > \omega_0 > 0$).

В соответствии с (8.2) ток в цепи

$$i_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right). \qquad (8.5)$$

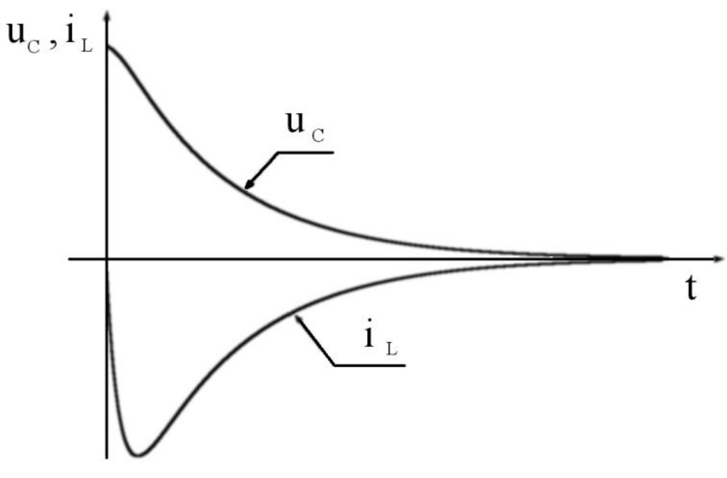

Рис. 8.2

Аналогичным образом можно найти закон изменения напряжения емкостного элемента $u_C(t)$. Графики $i(t)$ и $u_C(t)$ показаны на рис. 8.2.

Итак, при вещественных корнях характеристического уравнения токи и напряжения изменяются непериодически. Такой переходный процесс называют *апериодическим*.

Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Здесь $j = \sqrt{-1}$.

В соответствии с (8.2) ток

$$i_L(t) = -\frac{U_0 e^{\alpha t}}{j2\beta L}\left(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}\right) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{\alpha t} \sin\beta t.$$

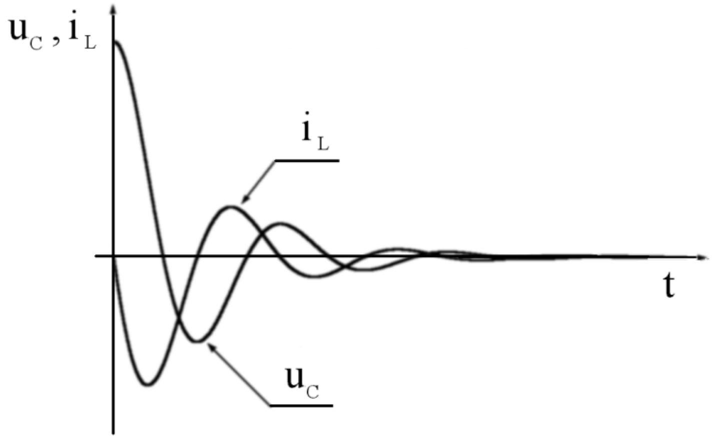

Рис. 8.3

Таким образом, если собственные частоты комплексные, в цепи возникают синусоидальные колебания, затухающие с течением времени (если $\alpha < 0$). Такой переходный процесс называют *колебательным*. Графики тока $i(t)$ и напряжения $u_C(t)$ для случая комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения показаны на рис. 8.3.

3. Подключение последовательного колебательного контура к источнику постоянного напряжения

Рассмотрим процессы в последовательном колебательном контуре, показанном на рис. 8.4. На входе цепи в момент $t = 0$ включается источник постоянного напряжения E.

Для цепи на рис. 8.4 справедливо уравнение

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = E. \qquad (8.6)$$

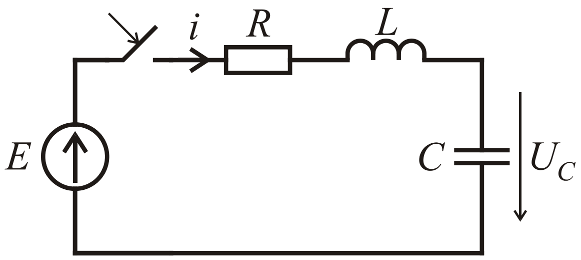

Рис. 8.4

Примем, что независимые начальные условия нулевые, т.е. $u_C(0)=0$, $i_L(0)=0$.

Продифференцировав левую и правую части (8.6), получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L\frac{d^2i}{dt}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=p^2+2\alpha p+\omega_0^2=0.$$

Постоянная затухания $\alpha=R/2L$. Частота собственных колебаний $\omega_0=1/\sqrt{LC}$.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-R/2L\pm\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}.$$

Решение уравнения (8.6) представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}+i(\infty). \quad (8.7)$$

Поскольку в цепи действует источник постоянного напряжения, принужденная составляющая тока $i(\infty)=0$.

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $i(t)$ и $\frac{di(t)}{dt}$ в момент времени $t=0+$:

$$i(0)=A_1+A_2=0; \qquad \frac{di(0_+)}{dt}=p_1A_1+p_2A_2=\frac{E}{L}.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$i_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right). \qquad (8.8)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения переходный процесс будет иметь апериодический или колебательный характер.

4. Переходный процесс в параллельном колебательном контуре

Рассмотрим процессы в параллельном колебательном контуре, показанном на рис. 8.5. На входе цепи в момент $t = 0$ включается источник постоянного тока J .

Для рассматриваемой цепи справедливо дифференциальное уравнение

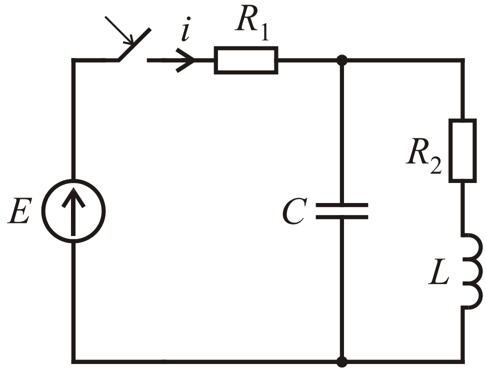

Рис. 8.5

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = 0. \qquad (8.9)$$

Здесь постоянная затухания

$$\alpha = -(a_{11} + a_{22})/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{L + R_1 R_2 C}{R_1 CL}\right);$$

частота собственных колебаний

$$\omega_0^2 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC}.$$

Характеристический полином, соответствующий уравнению (8.9):

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} .$$

В зависимости от соотношения номиналов элементов корни характеристического уравнения могут быть вещественными или комплексно-сопряженными.

Решение уравнения (8.1) представим в следующем виде

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + u_C(\infty). \qquad (8.10)$$

Здесь $u_C(\infty)$ – принужденная составляющая напряжения $u_C(t)$:

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E .$$

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $u_C(t)$ и $\frac{du_C(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0_+$:

$$u_C(0) = A_1 + A_2 + u_C(\infty);$$

$$\frac{du_C(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2 .$$

Производная $\frac{du_C(0_+)}{dt} = \frac{i_C(0_+)}{C}$. Начальное значение тока $i_C(0_+)$ найдем, анализируя цепь на рис. 8.5 в момент времени $t = 0_+$. При нулевых начальных условиях ($u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$)

$$i_C(0_+) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} + i_L(0) = \frac{E}{R_1} .$$

Итак, постоянные интегрирования A_1 и A_2 найдем, решая систему уравнений:

$$A_1 + A_2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 0; \tag{8.11}$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{R_1 C}. \tag{8.12}$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения переходный процесс будет иметь апериодический или колебательный характер. Аналогичным образом можно найти закон изменения тока индуктивного элемента $i_L(t)$.

5. Заключение

1. Переходные процессы в цепях второго порядка, содержащих индуктивный и емкостный элементы, существенным образом зависят от вида корней характеристического уравнения. Последние определяются конфигурацией цепи и значениями элементов и могут быть вещественными или комплексно сопряженными.

2. Простейшими цепями второго порядка являются последовательный и параллельный колебательные контуры.

3. В случае, если корней характеристического уравнения вещественные, переходный процесс в цепи второго порядка имеет апериодический характер.

4. Если корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, переходный процесс имеет колебательный характер.