Лекция 3. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

План

1. Метод узловых напряжений.
2. Алгоритм формирования узловых уравнений.
3. Формирование узловых уравнений для схем с ИТУН.
4. Модифицированный метод узловых напряжений.
5. Заключение.

1. Метод узловых напряжений (потенциалов)

Задачу анализа разветвленных цепей можно значительно упростить, если воспользоваться специальными методами, предназначенными для расчета сложных цепей. Одним из таких методов является *метод узловых напряжений*. В методе узловых напряжений независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного (опорного) узла. Эти величины называют *узловыми напряжениями*. Положительные направления узловых напряжений указывают стрелками от рассматриваемых узлов к базисному. В качестве последнего удобно выбирать заземленный узел или узел, в котором сходится наибольшее число ветвей. Уравнения составляют только на основе первого закона Кирхгофа.

Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то узловые напряжения будут равны потенциалам соответствующих узлов. Поэтому метод называют также *методом узловых потенциалов*.

Составление уравнений по методу узловых напряжений рассмотрим на примере. На рис. 3.1 изображена цепь, имеющая четыре узла. Примем узел 0 за базисный. Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов, кроме базисного.

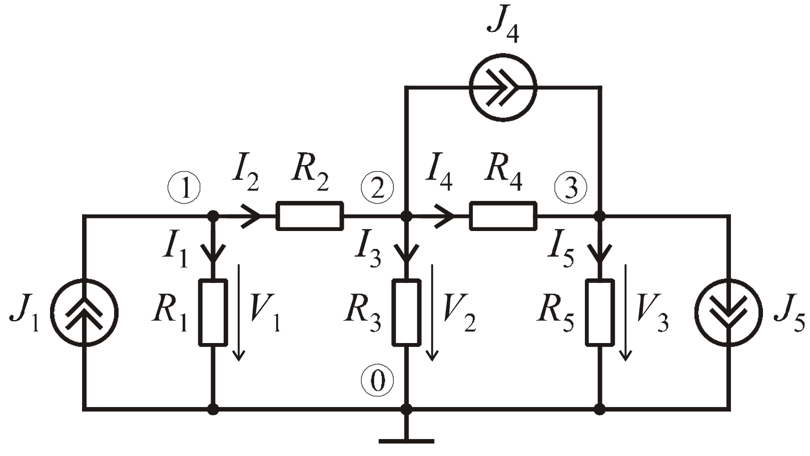


Рис. 3.1

Узел 1: $I_1 + I_2 = J_1$. (3.1а)

Узел 2: $-I_2 + I_3 + I_4 = -J_4$. (3.1б)

Узел 3: $-I_4 + I_5 = J_4 - J_5$. (3.1в)

Обозначим напряжения узлов V_1, V_2, V_3. Выразим токи ветвей через узловые напряжения и проводимости ветвей:

$$I_1 = G_1V_1; \quad I_2 = G_2(V_1 - V_2); \quad I_3 = G_3V_2; \quad I_4 = G_4(V_2 - V_3); \quad I_5 = G_5V_3.$$

Подставим полученные равенства в уравнения (3.1а)–(3.1в). После простых преобразований получим

$$(G_1 + G_2)V_1 - G_2V_2 = J_1,$$

$$-G_2V_1 + (G_2 + G_3 + G_4)V_2 - G_4V_3 = -J_4,$$

$$-G_4V_2 + (G_4 + G_5)V_3 = J_4 - J_5.$$

Полученная система уравнений позволяет легко найти искомые узловые напряжения. Ее называют *системой узловых уравнений*. В общем случае, если цепь имеет $n_у$ узлов, нам необходимо составить $n_у - 1$ узловых уравнений.

Узловые уравнения записаны на основе уравнений по первому закону Кирхгофа. Поэтому анализируемая цепь может содержать только независимые источники тока. Если в схеме имеются источники напряжения, они должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

Узловые уравнения удобно записывать в матричной форме. В общем виде для цепи, имеющей *n* + 1 узел, эти уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix}.$$

В более компактном виде

$$[G][V] = [J].$$

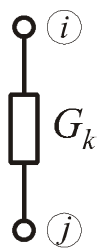
Здесь $[V]$ – вектор узловых напряжений. Квадратную матрицу коэффициентов $[G]$ называют *матрицей узловых проводимостей*, а вектор правой части – *вектором узловых токов*.

Для рассмотренного примера узловые уравнения в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ -J_4 \\ J_4-J_5 \end{bmatrix}.$$

Элементы на главной диагонали матрицы узловых проводимостей называют *собственными проводимостями* узлов. Собственная проводимость i-го узла g_{ii} равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле. Элементы матрицы $[G]$, расположенные вне главной диагонали, называют *взаимными проводимостями*. Взаимная проводимость между узлами i и j g_{ij} равна проводимости ветви, соединяющей эти узлы, взятой со знаком минус. В пассивной цепи, которая не содержит управляемых источников и идеальных ОУ, $g_{ij} = g_{ji}$, и матрица узловых проводимостей симметрична относительно главной диагонали.

Из сказанного следует, что если k-я ветвь включена между узлами i и j (рис. 3.2, *а*), ее проводимость G_k войдет в элементы матрицы узловых проводимостей, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами i и j (рис. 3.2, *б*).



$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & G_k & \cdots & -G_k & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \\ & -G_k & \cdots & G_k & \\ & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix}$$

а *б*

Рис. 3.2

Элементы вектора узловых токов равны алгебраической сумме токов источников, сходящихся в соответствующем узле. Если независимый источник тока J_k включен между узлами m и n (рис. 3.3, *а*), ток этого источника необходимо учесть в векторе узловых токов так, как показано на рис. 3.3, *б*.

2. Алгоритм формирования узловых уравнений

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей и вектора узловых токов не зависят от выбора направлений токов ветвей или нумерации узлов. Они позволяют сформировать узловые уравнения непосредственно по схеме, без предварительной записи уравнений по первому закону Кирхгофа.

Алгоритм формирования узловых уравнений включает следующие шаги.

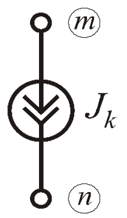
1. Выбираем базисный узел.

2. Остальным узлам присваиваем номера $1, 2, \ldots, n_у - 1$.

3. Представляем матрицу узловых проводимостей в виде таблицы, имеющей $(n_у - 1)$ строк и $(n_у - 1)$ столбцов.

4. Полагаем все элементы матрицы узловых проводимостей и векторы узловых токов равными нулю. Это эквивалентно исключению из схемы всех элементов.

5. Поочередно включаем элементы в схему. Если резистор включен между узлами i и j, его проводимость записываем в элементы матрицы, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами i и j (рис. 3.2). Если резистор включен между узлом i и базисным, его проводимость записываем в собственную проводимость i-го узла g_{ii}. Если между узлами i и j включен источник тока, его ток записываем в i-ю и j-ю строки вектора узловых токов (рис. 3.3).



$$\begin{array}{c} \\ m \\ \\ n \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \cdots \\ -J_k \\ \cdots \\ J_k \\ \cdots \end{bmatrix}$$

а *б*

Рис. 3.3

6. Формирование узловых уравнений заканчивается, когда в схему включены все элементы.

3. Формирование узловых уравнений для схем с ИТУН

Рассмотрим случай, когда цепь содержит источник тока, управляемый напряжением (ИТУН). Для того чтобы упростить выкладки, включим управляемый источник в рассмотренную выше схему так, как показано на рис. 3.4.

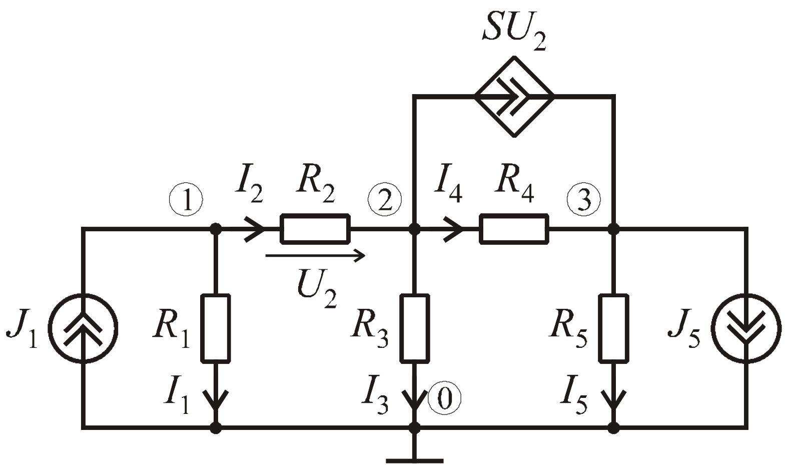


Рис. 3.4

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа:

узел 1: $I_1 + I_2 = J_1$;

узел 2: $-I_2 + I_3 + I_4 + SU_2 = 0$;

узел 3: $-I_4 + I_5 - SU_2 = -J_5$.

Выражая токи через узловые напряжения и проводимости ветвей, получим узловые уравнения. Запишем их в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + S & G_2 + G_3 + G_4 - S & -G_4 \\ -S & -G_4 + S & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ -J_5 \end{bmatrix}.$$

Параметр управляемого источника входит в элементы матрицы узловых проводимостей, которые находятся на пересечении строк 2, 3 и столбцов 1, 2.

В общем случае, если ИТУН включен между узлами i, j, k, l так, как показано на рис. 3.5, его параметр S войдет в матрицу узловых проводимостей следующим образом:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & j \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & \cdots & S & \cdots & S \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & \cdots & -S & \cdots & S \end{bmatrix} \end{array}.$$

Заметим, что матрица узловых проводимостей цепи, содержащей управляемые источники, в отличие от матрицы пассивной цепи не будет симметричной.

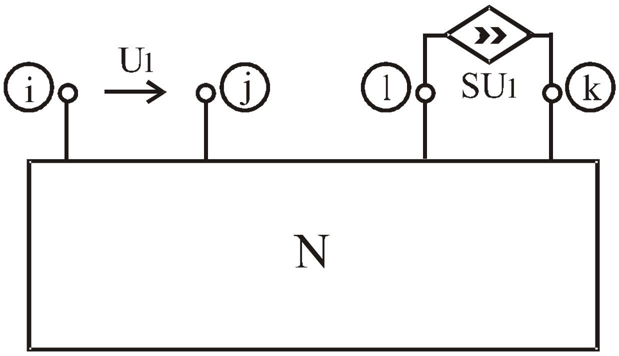


Рис. 3.5

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей используются в алгоритме формирования узловых уравнений, основанном на последовательном переборе ветвей.

Метод узловых напряжений широко используется в программах машинного анализа электронных схем. Это объясняется простотой алгоритма формирования узловых уравнений и хорошей численной обусловленностью матрицы узловых проводимостей.

4. Модифицированный метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений применим для цепей, которые содержат только резистивные элементы с ненулевым сопротивлением, независимые источники тока и источники тока, управляемые напряжением (ИТУН). Если в схеме имеются другие виды элементов, например независимые источники напряжения или управляемые источники (кроме ИТУН), они должны быть преобразованы в эквивалентные источники тока. Такие элементы называют *нерегулярными*.

Этих недостатков лишен *модифицированный*, или расширенный, метод узловых напряжений. Суть этого метода заключается в следующем.

1. Независимыми переменными являются узловые напряжения, а также токи нерегулярных элементов.

2. Система уравнений включает уравнения на основе первого закона Кирхгофа и компонентные уравнения нерегулярных элементов.

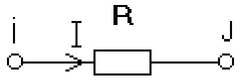
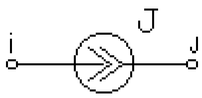
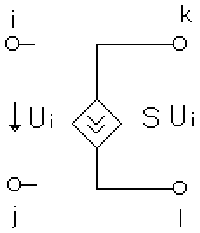
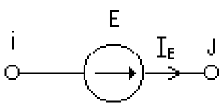
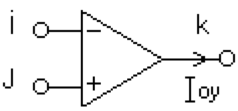
Расширенные узловые уравнения имеют следующую форму:

$$\begin{bmatrix} [Y] & [M] \\ [N] & [Z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J] \\ [E] \end{bmatrix}.$$

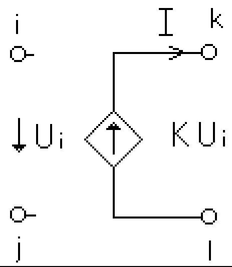
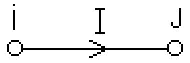
Верхняя левая часть матрицы коэффициентов $[Y]$ размера $(n_y - 1)\cdot(n_y - 1)$ является матрицей узловых проводимостей регулярной части цепи. Субматрица $[M]$ содержит коэффициенты компонентных уравнений, а $[N]$ учитывает токи нерегулярных элементов в уравнениях по первому закону Кирхгофа.

Каждому нерегулярному элементу в расширенной системе уравнений соответствуют дополнительные строка и столбец. Для каждого вида элементов они имеют определенную форму. В строке записывают коэффициенты компонентного уравнения, а в столбце – коэффициенты уравнений по первому закону Кирхгофа, учитывающих ток нерегулярного элемента. Для каждого такого элемента дополнительные строка и столбец имеют определенную структуру, которые удобно изображать в виде трафаретов или «штампов». «Штампы» основных элементов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Элемент	Компонентное уравнение	«Штамп»
1	2	3
Резистор 	—	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \left[\begin{array}{cc} G & -G \\ -G & G \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник тока 	—	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} Vi \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}$
ИТУН 	—	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ l \end{array} & \left[\begin{array}{cc} S & -S \\ -S & S \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник напряжения 	$V_j - V_i = E$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & -1 \\ -1 & 1 & \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ \mathrm{I}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$
Идеальный ОУ 	$V_i - V_j = 0$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ k \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & -1 \\ -1 & 1 & \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ \mathrm{I}_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Окончание табл. 3.1

1	2	3
ИНУН 	$k(V_i - V_j) - V_k - V_l = 0$	$\begin{array}{c} \\ k \\ l \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & l & k & l \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & & 1 \\ & & & \\ k & -k & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$
Короткозамкнутая ветвь 	$V_i - V_J = 0$	$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & -1 \\ 1 & -1 & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Примеры составления модифицированных узловых уравнений.

Пример 3.1. Запишем модифицированные узловые уравнения для цепи, показанной на рис. 3.8.

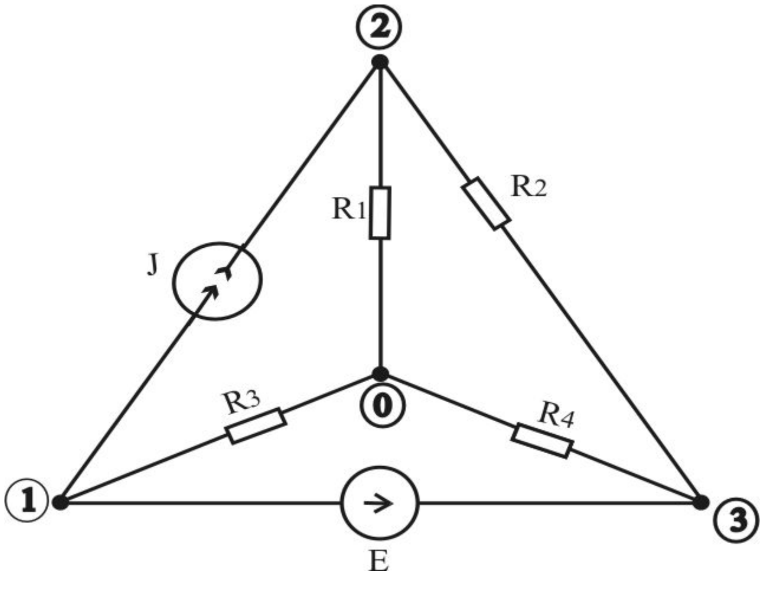


Рис. 3.8

Расширенные узловые уравнения для схемы на рис. 3.8 имеют вид:

$$\begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ +J \\ 0 \\ E \end{bmatrix}.$$

В последней строке записано компонентное уравнение источника напряжения: $-V_1 + V_3 = E$. Элементы последнего столбца матрицы коэффициентов учитывают ток нерегулярного элемента (I_E) в уравнениях для первого и третьего столбцов**.**

Пример 3.2. Составить расширенные узловые уравнения для схемы с идеальным операционным усилителем (рис. 3.9).

Компонентные уравнения нерегулярных элементов.

Источник напряжения: $V_1 = E$;

Операционный усилитель: $V_1 - V_2 = 0$.

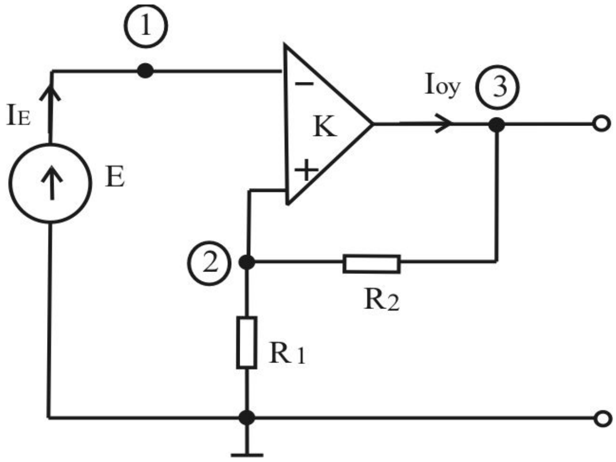


Рис. 3.9

Расширенные узловые уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \\ I_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Заключение

1. Метод узловых напряжений – метод расчета электрических цепей, в котором независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного узла. Уравнения составляют на основе первого закона Кирхгофа.

2. Узловые уравнения, записанные в матричной форме, имеют вид

$$[G][V] = [J].$$

Здесь $[V]$ – вектор узловых напряжений. Квадратную матрицу коэффициентов $[G]$ называют матрицей узловых проводимостей, а вектор правой части $[J]$ – вектором узловых токов.

3. Элементы на главной диагонали матрицы узловых проводимостей называют *собственными проводимостями* узлов. Собственная проводимость i-го узла g_{ii} равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле. Элементы матрицы $[G]$, расположенные вне главной диагонали, называют *взаимными проводимостями*. Взаимная проводимость между узлами i и j g_{ij} равна проводимости ветви, соединяющей эти узлы, взятой со знаком минус.

4. Метод узловых напряжений широко используется в программах компьютерного моделирования электрических цепей. Это объясняется простотой алгоритма формирования узловых уравнений и хорошей численной обусловленностью матрицы узловых проводимостей.