Лекция 2. АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

План

1. Задача анализа электрических цепей. Законы Кирхгофа.
2. Примеры анализа резистивных цепей.
3. Эквивалентные преобразования участка цепи.
4. Заключение

1. Задача анализа электрических цепей. Законы Кирхгофа

Электрическая цепь, образованная путем соединения между собой идеализированных элементов, является математической моделью реального электротехнического или электронного устройства. Чем больше элементов содержит такая цепь, тем точнее отображает она характеристики моделируемого устройства.

Дадим определения основных понятий, касающихся геометрической конфигурации, или *топологии*, электрических цепей.

Ветвь – участок цепи с двумя выводами. Ветвью может быть отдельный элемент либо группа элементов, соединенных последовательно или параллельно.

Узел – точка соединения двух или более ветвей. Место соединения двух ветвей удобно рассматривать в качестве узла при машинных расчетах. При ручных расчетах несколько элементов, соединенных последовательно или параллельно, удобно рассматривать как одну ветвь. Поэтому при ручных расчетах узлом считают соединение трех или более ветвей.

Контур – замкнутый путь, проходящий через ряд ветвей и узлов.

Задача анализа электрической цепи формулируется следующим образом. Заданы схема цепи и характеристики ее элементов, а также напряжения и токи независимых источников. Требуется найти токи и напряжения ветвей.

Уравнения, описывающие поведение электрической цепи, составляют на основе законов Кирхгофа.

Чтобы записать уравнения по законам Кирхгофа, необходимо сначала выбрать положительные направления токов и напряжений ветвей. Положительное направление тока показывают стрелкой на выводе элемента. Положительное направление напряжения показывают стрелкой, расположенной рядом с элементом. Направления токов и напряжений резистивных элементов выбирают согласованными. Сопротивление проводников, соединяющих элементы, очень мало по сравнению с сопротивлениями резисторов, и им пренебрегают.

Направления напряжений и токов источников следует рассмотреть особо. Стрелка ЭДС источника напряжения направлена к его положительному выводу. Поэтому напряжение на внешних зажимах этого источника направлено в сторону, противоположную ЭДС.

Первый закон Кирхгофа определяет баланс токов в узлах электрической цепи. Он формулируется следующим образом:

Алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0. \qquad (2.1)$$

В уравнении (2.1) токи, направленные от узла, записывают с положительным знаком. Токи, направленные к узлу, записывают со знаком минус.

Система уравнений по первому закону Кирхгофа, записанная для всех узлов цепи, линейно зависима. В этом легко убедиться, сложив все уравнения. Поскольку ток каждой ветви входит в два уравнения с разными знаками, сумма тождественно равна нулю. Поэтому число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа равно $n_y - 1$, где n_y – число узлов цепи.

Второй закон Кирхгофа устанавливает баланс напряжений в контуре цепи:

Алгебраическая сумма напряжений ветвей в контуре равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0. \qquad (2.2)$$

Если напряжение ветви совпадает с направлением обхода контура, то напряжению приписывают знак плюс, если же нет – знак минус. Перенесем напряжения источников напряжения, равные ЭДС этих источников, в правую часть. Уравнение (2.2) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} e_k .$$

В соответствии с последним равенством во всяком контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений ветвей равна алгебраической сумме ЭДС источников.

Число независимых уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров. Можно показать, что число таких контуров определяется формулой $n_b - n_y + 1$, где n_b – число ветвей. В качестве независимых контуров удобно выбирать внутренние ячейки цепи. Можно воспользоваться и другим способом: выбрать по порядку контуры, так чтобы каждый следующий контур содержал, по меньшей мере, одну ветвь, не входящую в предыдущие контуры.

Подчеркнем, что законы Кирхгофа справедливы для любых цепей с сосредоточенными параметрами. Они выполняются как для линейных, так и для нелинейных цепей, при любой форме напряжений и токов.

2. Примеры анализа резистивных цепей

Рассмотрим примеры анализа цепей с помощью законов Кирхгофа.

Пример 2.1. Анализ линейной резистивной цепи.

Рассчитать токи и напряжения в цепи, показанной на рис. 2.1. $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $J = 0.9$ А, $E = 18$ В.

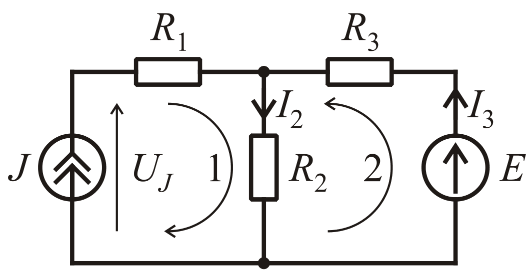

Рис. 2.1

Решение. Выберем положительные направления токов и напряжений, как показано на рис. 2.1. Направления напряжений и токов резистивных элементов совпадают, поэтому для них достаточно показать только направления токов. Запишем уравнения по законам Кирхгофа:

Верхний узел: $I_2 - I_3 - J = 0$.

Контур I: $R_1 J + R_2 I_2 + U_J = 0$.

Контур II: $R_2 I_2 + R_3 I_3 = E$.

Решая уравнения, получим: $I_2 = 1$ А, $I_3 = 0.1$ А, $U_J = -24$ В.

Напряжения резистивных элементов можно найти с помощью закона Ома. Напомним, что внутреннее сопротивление источника тока бесконечно велико. Поэтому напряжение этого источника (как и ток источника напряжения) находят из уравнений по законам Кирхгофа.

Пример 2.2. Мост Уитстона (рис. 2.2) используется для измерения сопротивлений. В одно плечо моста включается источник напряжения, а в другое измерительный прибор – нуль-индикатор *D*, сопротивление которого можно считать равным нулю. Необходимо определить ток в плече с нуль-индикатором.

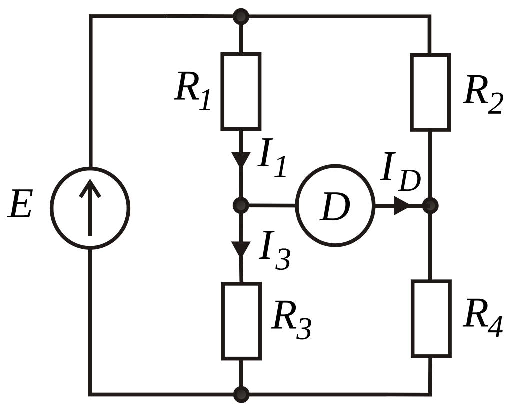

Рис. 2.2

Решение. Ток нуль-индикатора найдем из уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$I_D - I_1 + I_3 = 0.$$

Для расчета токов определим эквивалентное сопротивление цепи:

$$R_Э = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Ток неразветвленной части цепи

$$I_0 = \frac{E}{R_Э}.$$

Поскольку резисторы R_1 и R_2, R_3 и R_4 соединены параллельно, токи в них распределяются обратно пропорционально сопротивлениям:

$$I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_3 = I_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

Ток нуль-индикатора

$$I_D = I_1 - I_3 = I_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}. \qquad (2.3)$$

Обычно R_4 – неизвестное сопротивление, а $R_1 - R_3$ регулируются до тех пор, пока ток через нуль-индикатор D не станет равным нулю. Из уравнения (2.3) следует, что сопротивление резистора R_4 при этом

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

Пример 2.3. Анализ цепи с управляемыми источниками.

Определить напряжение на выходе усилителя напряжения в схеме, показанной на рис. 2.3. Коэффициент передачи усилителя равен K, входное сопротивление бесконечно, а выходное равно нулю.

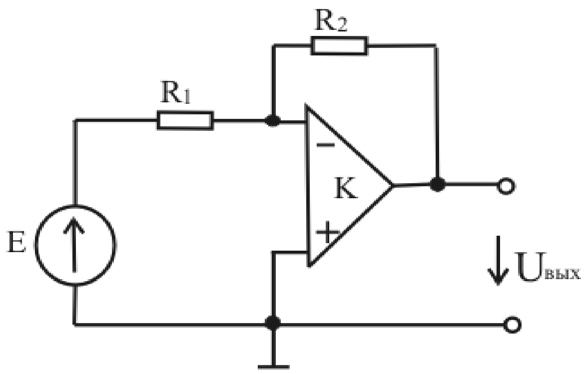

Рис. 2.3

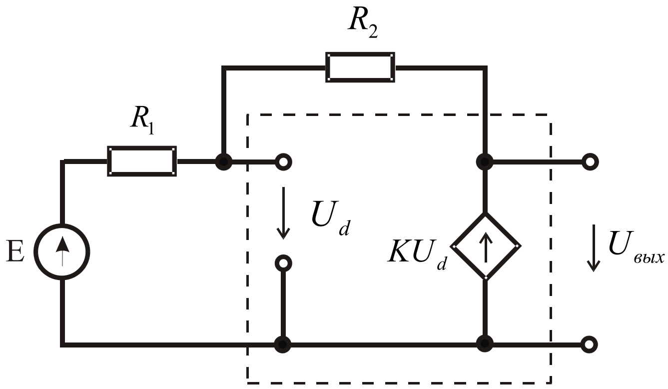

Рис. 2.4

Решение. Заменим усилитель источником напряжения, управляемым напряжением (рис. 2.4). Выходное напряжение $U_{\text{вых}} = KU_d$.

Поскольку входное сопротивление усилителя бесконечно, токи резисторов одинаковы. Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_1 I + R_2 I = E - KU_d;$$

$$R_1 I - U_d = E.$$

Решая эти уравнения, найдем, что

$$U_d = -\frac{R_2}{(K+1)R_1 + R_2} E; \tag{2.4}$$

$$U_{\text{вых}} = KU_d = -\frac{KR_2}{(K+1)R_1 + R_2} E. \tag{2.5}$$

Итак, выходное напряжение рассматриваемой схемы зависит как от коэффициента усиления K, так и от сопротивлений R_1 и R_2. Резисторы R_1 и R_2 образуют цепь отрицательной обратной связи. Она служит для передачи части выходного напряжения на вход усилителя. При этом часть входного напряжения усилителя компенсируется.

Особый интерес представляет случай, когда коэффициент усиления ИНУН очень велик. Такой усилитель называют *операционным*. Из формул (2.4) и (2.5) следует, что при $K \to \infty$ напряжение на входе усилителя $U_d \to 0$, а выходное напряжение не зависит от коэффициента усиления активного элемента:

$$U_{\text{вых}} = -\frac{R_2}{R_1} E .$$

Рассмотренный пример иллюстрирует влияние отрицательной обратной связи на характеристики цепей с усилителями.

3. Эквивалентные преобразования участка цепи

При расчете разветвленных электрических цепей часто целесообразно преобразовать участок цепи в более простой и удобный для расчета. Например, последовательно или параллельно соединенные элементы заменяют одним. Схему с несколькими источниками часто удается преобразовать в одноконтурную или в схему с двумя узлами, что значительно упрощает последующий расчет.

Два участка цепи называют *эквивалентными*, если при замене одного участка на другой токи и напряжения остальной части цепи остаются неизменными.

Одним из основных видов преобразования является замена источника напряжения эквивалентным источником тока. Часто используют также преобразование треугольника ветвей в эквивалентную звезду.

3.1. Последовательное и параллельное соединения двухполюсных элементов. Делители напряжения и тока

Простейшими соединениями двухполюсных элементов являются последовательное и параллельное соединения.

При *последовательном соединении* двухполюсников (рис. 2.5) их токи равны. Общее напряжение равно сумме напряжений отдельных элементов:

$$U = U_1 + U_2.$$

В соответствии с законом Ома

$$U = R_1 I + R_2 I = R_Э I. \qquad (2.6)$$

Здесь

$$R_э = R_1 + R_2.$$

Итак, последовательное соединение резисторов можно заменить одним резистором, сопротивление которого равно сумме сопротивлений резисторов, образующих последовательную цепь.

Из (1.12) следует, что ток в цепи на рис. 2.5 равен

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Напряжения на отдельных элементах делятся пропорционально их сопротивлениям:

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U,$$

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U.$$

Поэтому цепь, образованную последовательным соединением элементов, называют *делителем напряжения*.

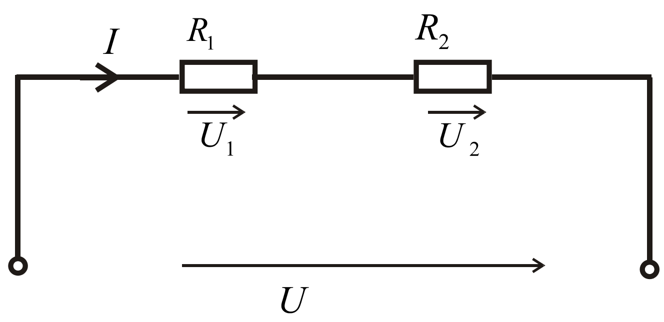

Рис. 2.5

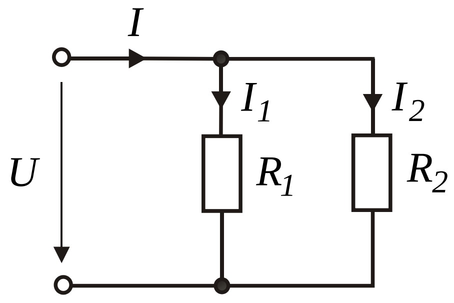

Рис. 2.6

Если в цепи имеются несколько источников напряжения, соединенных последовательно, в соответствии с вторым законом Кирхгофа их можно заменить одним источником, напряжение которого равно сумме напряжений источников, входящих в соединение.

Отличительной особенностью *параллельного соединения* двухполюсных элементов является равенство напряжений на их зажимах. На рис. 2.6 показан пример параллельного соединения резисторов.

Общий ток такой цепи равен сумме токов отдельных элементов:

$$I = I_1 + I_2 .$$

В соответствии с законом Ома

$$I = G_1 U + G_2 U = G_э U ,$$

где $G_э = G_1 + G_2$.

Итак, при параллельном соединении линейных резисторов общая проводимость участка цепи равна сумме проводимостей отдельных элементов. Сопротивление цепи на рис. 2.6 можно найти по формуле

$$R_э = \frac{1}{G_э} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Токи в параллельных ветвях делятся обратно пропорционально их сопротивлениям:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} , \qquad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} .$$

Эти равенства называют *формулами разброса* или *формулами «чужой ветви»,* а параллельную цепь часто называют *делителем тока*.

Если в схеме имеются несколько источников тока, включенных параллельно, в соответствии с первым законом Кирхгофа эти источники можно заменить одним источником, ток которого равен алгебраической сумме токов источников, входящих в соединение.

3.2. Преобразования источников напряжения и тока

Рассмотрим цепь, образованную последовательным соединением источника напряжения и резистора (рис. 2.7, *а*). Для этой цепи справедливо равенство

$$U + RI = E.$$

Выразим из этого уравнения ток:

$$I = -\frac{U}{R} + \frac{E}{R} = -\frac{U}{R} + J_э.$$

Последнему равенству соответствует цепь, образованная параллельным соединением источника тока $J_э = E/R$ и резистора сопротивлением R (рис. 2.7, *б*). Поскольку токи и напряжения на внешних зажимах схем одинаковы, они эквивалентны. Разумеется, возможно и обратное преобразование источника тока в эквивалентный источник напряжения. При этом $E_э = RJ$.

Рис. 2.7

В некоторых случаях замена источника напряжения эквивалентным источником тока или обратно позволяет существенно упростить расчет.

3.3. Преобразование треугольника ветвей в эквивалентную звезду

При расчетах разветвленных цепей возникает задача преобразования треугольника ветвей в эквивалентную звезду. Эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными зажимами токи, входящие в одноименные зажимы, одинаковы. Найдем формулы, позволяющие выполнить такое преобразование.

Для схемы треугольника на рис. 2.8, *а* справедливы уравнения:

$$I_{12} - I_{31} = I_1; \tag{2.7а}$$

$$I_{23} - I_{12} = I_2; \tag{2.7б}$$

$$I_{31} - I_{23} = I_3; \tag{2.7в}$$

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0. \qquad (2.7г)$$

Решая систему уравнений (2.7) относительно I_{12}, получим

$$I_{12} = \frac{R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2 .$$

Напряжение

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2 . \qquad (2.8)$$

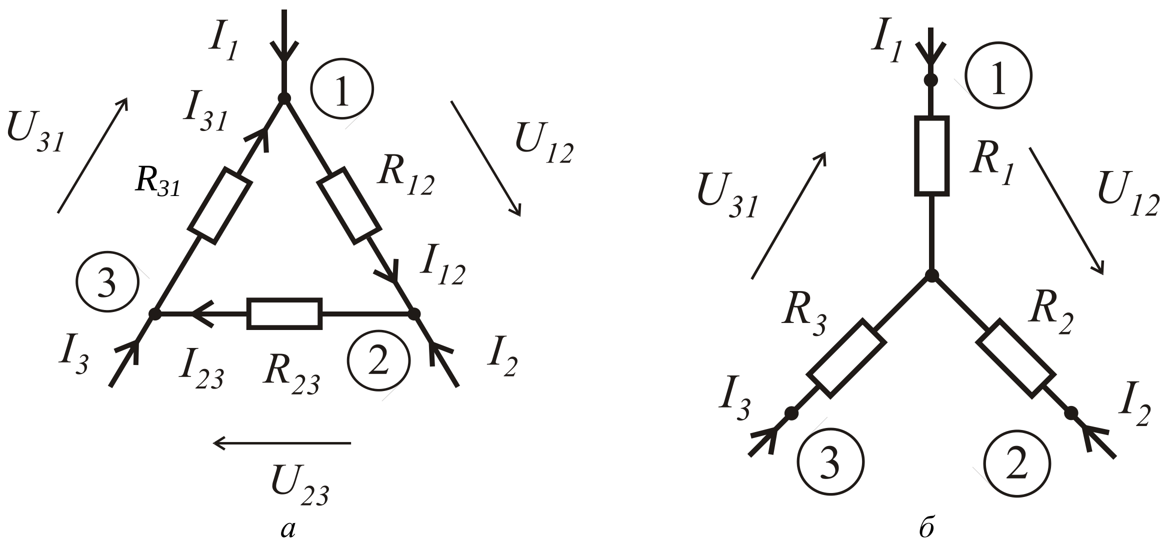

Рис. 2.8

Решая систему (1.14) относительно I_{23}, получим

$$U_{23} = R_{23}I_{23} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2 - \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_3 . \qquad (2.9)$$

Уравнениям (2.8) и (2.9) соответствует эквивалентная схема на рис. 2.8, *б*, в которой резисторы соединены звездой. Сопротивления резисторов определяются равенствами:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Итак, *сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений сторон треугольника*.

Можно выполнить и обратное преобразование, заменив звезду ветвей эквивалентным треугольником. Сопротивления резисторов, образующих стороны треугольника, определяются равенствами:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Следовательно, *проводимость стороны треугольника равна произведению проводимостей прилегающих лучей звезды, деленному на сумму проводимостей лучей звезды*.

3.4. Метод двух узлов

При расчетах разветвленных цепей встречаются случаи, когда анализируемая цепь образована параллельным соединением нескольких ветвей, т.е. является схемой с двумя узлами. Пример такой цепи показан на рис. 2.9

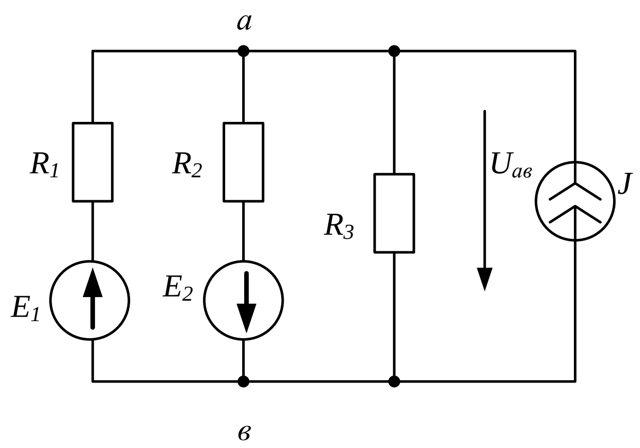

Рис. 2.9

Анализ таких цепей можно упростить, определив сначала напряжение между узлами *а* и *в*. Используя преобразование источников напряжения в эквивалентные источники тока, получим:

$$U_{ab} = \frac{\sum\limits_{(j)} E_j / R_j + \sum\limits_{(i)} J_i}{\sum\limits_{(j)} 1/R_j}. \qquad (2.10)$$

При вычислении напряжения U_{ab} с положительным знаком записываются те слагаемые числителя, которые соответствуют источникам, направленным к узлу a.

После того, как определено напряжение U_{ab}, легко могут быть вычислены токи ветвей.

Выражение (2.10) широко используется для расчета цепей с двумя узлами, а также более сложных цепей, которые могут быть представлены в виде схем с двумя узлами.

Рассмотренный метод расчета является частным случаем общего метода анализа разветвленных цепей, называемого *методом узловых напряжений*. Он будет рассмотрен в следующей лекции.

4. Заключение

1. Основными понятиями, определяющими топологию электрической цепи, являются ветвь, узел и контур. Ветвь – участок цепи с двумя выводами. Узел – место соединения двух или более ветвей. Контур – замкнутая последовательность ветвей.

2. Уравнения, определяющие связь между токами и напряжениями цепи составляются на основе законов Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений ветвей в контуре равна нулю.

3. При последовательном соединении двухполюсных элементов их токи равны, а общее напряжение равно сумме напряжений отдельных элементов. Цепь, образованная последовательным соединением элементов, является делителем напряжения.

4. При параллельном соединении двухполюсных элементов напряжения на их зажимах равны. Цепь, образованная параллельным соединением элементов, является делителем тока.