

## Лекция 16. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### План

1. Преобразование Лапласа.
2. Свойства преобразования Лапласа.
3. Операторный метод анализа электрических цепей.
4. Определение оригинала по известному изображению.
5. Примеры расчета электрических цепей операторным методом.
6. Заключение.

### 1. Преобразование Лапласа

Преобразование Фурье, рассмотренное на предыдущей лекции, применимо к функциям времени, абсолютно интегрируемым в бесконечных пределах. Такому требованию не отвечают многие функции, используемые в теории цепей. Например, не являются абсолютно интегрируемыми такие функции, как синусоидальная или единичная ступенчатая.

Один из способов расширения области применимости преобразования Фурье, определяемого формулой (15.3) заключается в том, что функцию  $f(t)$  умножают на другую, так что произведение этих функций убывает при  $t \rightarrow \infty$ . Таким множителем может служить экспонента  $e^{-\sigma t}$ . Постоянная  $\sigma$  вещественна и положительна.

Необходимо отметить, что произведение  $f(t)e^{-\sigma t}$  не стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . Это вызывает расхождение интеграла с нижним пределом интегрирования, равным  $-\infty$ . Чтобы преодолеть это затруднение, перенесем нижний предел интегрирования из  $(-\infty)$  в 0. Такое отсечение части интервала интегрирования эквивалентно тому, что все функции времени полагаются равными нулю при  $t < 0$ . Поскольку переходные процессы рассматриваются с момента времени  $t = 0$ , такое ограничение не имеет существенного значения. В результате мы получим одностороннее преобразование:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt. \quad (16.1)$$

Объединим множитель  $e^{-\sigma t}$ , обеспечивающий сходимость интеграла, с ядром преобразования  $e^{-j\omega t}$ :

$$e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{-pt}.$$

Здесь  $p = \sigma + j\omega t$ . Преобразование (16.1) примет вид

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (16.2)$$

Равенство (16.2) является односторонним преобразованием Лапласа. Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье. В силу большей общности область применимости преобразования Лапласа значительно шире.

С помощью формулы (16.2) функция времени  $f(t)$  преобразуется в функцию комплексной переменной  $F(p)$ . Функцию  $f(t)$  называют *оригиналом*, а  $F(p)$  – *изображением*. В табл. 16.1 приведены дробно-рациональные изображения некоторых наиболее широко используемых функций времени.

Таблица 16.1

Таблицы оригиналов и изображений по Лапласу

Оригинал	Изображение
$\delta_0(t)$	1
$\delta(t)$	$\frac{1}{p}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Поскольку преобразования Лапласа и Фурье тесно связаны, спектральную функцию можно найти, заменив в выражении изображения по Лапласу

комплексную переменную  $p$  мнимой переменной  $j\omega$ :

$$F(j\omega) = F(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Такой путь нахождения спектральных функций является наиболее удобным, поскольку он позволяет использовать таблицы оригиналов и изображений по Лапласу.

## 2. Свойства преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа широко используется в электротехнике, радиоэлектронике, теории автоматического управления. Такая широкая область применения объясняется свойствами этого преобразования, позволяющими заменить систему интегродифференциальных уравнений более простой системой алгебраических уравнений.

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Лапласа. Как уже отмечалось, его можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье. Поэтому рассматриваемые свойства справедливы и для преобразования Фурье. Знание этих свойств необходимо для понимания процессов преобразования сигналов в линейных цепях.

1. *Однозначность.* Существует однозначное соответствие между оригиналом и изображением, т. е. функции  $f(t)$  соответствует единственное изображение  $F(p)$  и, наоборот,  $F(p)$  соответствует только один оригинал  $f(t)$ . Следовательно, мы можем заменить функции времени изображениями, решить задачу в частотной области, а затем найти оригинал решения. Однозначность гарантирует, что полученный результат является решением исходной задачи.

2. *Линейность.* Если  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  имеют изображения  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$ , а коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – постоянные, не зависящие от времени, то справедливо равенство

$$L\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p).$$

Доказательство последнего равенства вытекает из свойства линейности интеграла в формуле прямого преобразования Лапласа. Из свойства линейности следует, что уравнения по законам Кирхгофа могут быть записаны не только для токов и напряжений, но и для их изображений по Лапласу.

Свойство линейности упрощает нахождение оригиналов сложных изображений. Функцию времени сложной формы можно представить в виде суммы простых слагаемых, а затем найти оригиналы каждого из них. Оригинал найдем как сумму оригиналов отдельных слагаемых.

3. *Дифференцирование и интегрирование во временной области.* Если функция  $f(t)$  имеет изображение  $F(p)$ , то изображение производной

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0_-). \quad (16.3)$$

Из последнего равенства следует, что дифференцированию функции времени соответствует умножение изображения на  $p$ . Интегрированию функции времени соответствует деление изображения на  $p$ :

$$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{p}F(p) + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{p}.$$

Здесь  $f(0_-)$  представляет значение интеграла при  $t = 0_-$  и учитывает начальные условия.

Таким образом, операциям дифференцирования и интегрирования оригиналов соответствует умножение и деление изображений на  $p$ .

4. *Изменение масштаба.* Если  $F(p)$  – изображение функции времени  $f(t)$ , то изображение функции  $f(t/a)$  имеет вид

$$L\{f(t/a)\} = aF(ap).$$

Это свойство следует из определения прямого преобразования Лапласа. Изображение функции  $f(t/a)$ :

$$L\{f(t/a)\} = \int_0^t f(t/a)e^{-pt} dt.$$

Введем новую переменную  $\tau = t/a$ . Последнее равенство примет вид

$$L\{f(\tau)\} = \int_0^t f(\tau)e^{-ap\tau} d(a\tau) = aF(ap). \quad (16.4)$$

Итак, если  $a > 1$ , то  $f(t)$  сжимается по оси времени в  $a$  раз. При этом аргумент и ордината изображения увеличиваются в  $a$  раз.

*Пример 16.1.* В соответствии с табл. 16.1 изображение синусоидальной функции времени частотой 1 рад/с

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Если частоту увеличить до 100 рад/с ( $a = 100$ ), то в соответствии с (16.4) изображение примет вид

$$L\{\sin 100 t\} = \frac{100}{p^2 + 10^4}.$$

Увеличение длительности импульса вызывает сжатие его спектральной функции и уменьшение амплитуд гармонических составляющих спектра. Следствием этого является тот факт, что при передаче сигналов в форме последовательности импульсов ширина полосы пропускания должна быть тем больше, чем короче передаваемые импульсы.

5. *Смещение во временной области.* Если  $F(p)$  – изображение по Лапласу функции  $f(t)$ , то изображение  $f(t)$ , смещенной на интервал  $\tau$ , равно

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} F(p).$$

Это свойство часто называют теоремой запаздывания. Она является следствием прямого преобразования Лапласа. Введем переменную  $t_1 = t - \tau$ . Изображение смещенной функции времени

$$L\{f(t')\} = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = e^{-p\tau} F(p).$$

Таким образом, смещение  $f(t)$  по оси времени на интервал  $\tau$  соответствует умножению изображения  $F(p)$  на экспоненциальную функцию  $e^{-p\tau}$ .

*Пример 16.2.* Определить изображение прямоугольного импульса единичной амплитуды, действующего на интервале времени  $t_1 - t_2$  (рис. 16.1).

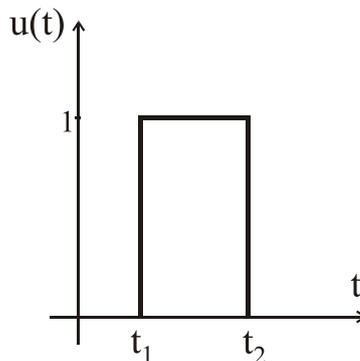


Рис. 16.1

Этот импульс можно представить в виде суммы ступенчатых функций, смещенных во времени:

$$u(t) = \delta(t - t_1) - \delta(t - t_2).$$

В соответствии с теоремой запаздывания изображение функции  $u(t)$

$$U(p) = \frac{1}{p} (e^{-pt_1} - e^{-pt_2}).$$

*Пример 16.3.* Определить оригинал функции

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (1 - e^{-2\pi p}).$$

*Решение.* Запишем  $F(p)$  в виде разности

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1} e^{-2\pi p}.$$

Оригинал первого слагаемого – синусоидальная функция  $\sin t$ . Второму слагаемому соответствует синусоидальная функция, смещенная на интервал  $\tau = 2\pi$ . Таким образом, оригиналом  $F(p)$  является функция времени

$$f(t) = \sin t - \sin(t - 2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}.$$

6. *Смещение в частотной области.* Если функция времени  $f(t)$  имеет изображение по Лапласу  $F(p)$ , то смещению комплексной переменной на  $p_0$  соответствует умножение оригинала на  $e^{-p_0 t}$ :

$$L\{e^{-p_0 t} f(t)\} = F(p + p_0).$$

Для доказательства подставим в формулу прямого преобразования Лапласа  $p + p_0$  вместо  $p$ :

$$F(p + p_0) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+p_0)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) e^{-pt} dt.$$

Из последнего выражения следует, что  $F(p + p_0)$  является изображением функции  $e^{-p_0 t} f(t)$ .

### 3. Операторный метод анализа электрических цепей

Преобразование Лапласа широко используется для анализа электрических цепей. Можно записать систему интегро-дифференциальных уравнений, а затем, переходя к изображениям, получить систему алгебраических уравнений. Решая эти уравнения, получим изображение реакции цепи.

Однако наиболее рациональный путь применения преобразования Лапласа состоит в непосредственном составлении уравнений для изображений в операторной схеме замещения.

Рассмотрим операторные схемы замещения двухполюсных элементов, учитывающие начальные условия.

1. *Резистивный элемент*. Напряжение и ток на зажимах резистора связаны законом Ома:

$$u(t) = Ri(t).$$

Переходя к изображениям и учитывая свойство линейности преобразования Лапласа, получим

$$U(p) = RI(p).$$

Операторное сопротивление двухполюсника определяется равенством

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}.$$

Для резистивного элемента

$$Z_R(p) = R.$$

Таким образом, операторной схемой замещения резистивного элемента является двухполюсник с сопротивлением  $R$ .

2. *Индуктивный элемент* (рис. 16.2, а). Связь напряжения и тока индуктивного элемента определяется дифференциальным уравнением

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Учитывая, что дифференцированию функции времени соответствует

умножение изображения на  $p$ , получим

$$U(p) = pLI(p) - Li_L(0).$$

Здесь  $i_L(0)$  – начальный ток индуктивного элемента при  $t = 0$ . Последнему равенству соответствуют операторные схемы замещения, показанные на рис. 16.2, б и 16.2, в.

Независимый источник на рис. 16.2, б, в учитывает начальный ток индуктивного элемента. При нулевых начальных условиях, когда  $i_L(0) = 0$ , операторная схема замещения содержит только двухполюсник с операторным сопротивлением  $Z_L(p) = pL$ .

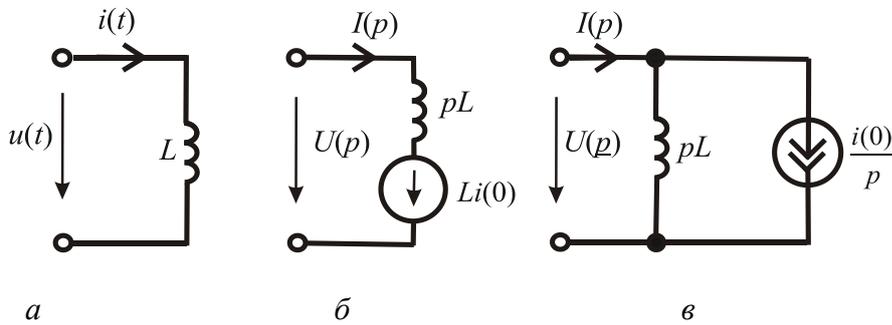


Рис. 16.2

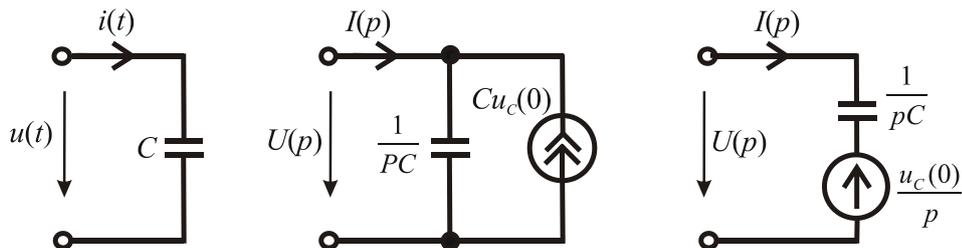
3. *Емкостный элемент* (рис. 16.3, а). Ток и напряжение емкостного элемента

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

С учетом формулы (16.3) получим

$$I(p) = pCI(p) - Cu_C(0). \tag{16.5}$$

Здесь  $u_C(0)$  – начальное напряжение емкостного элемента в момент  $t = 0$ . Формуле (16.5) соответствуют операторные схемы замещения, показанные на рис. 16.3, б, в.



а

б

в

Рис. 16.3

Независимые источники в схемах на рис. 16.3, б, в учитывают начальное напряжение конденсатора  $u_C(0)$ . При нулевых начальных условиях операторная схема замещения емкостного элемента содержит только двухполюсник с операторным сопротивлением  $Z_C(p) = \frac{1}{pC}$ .

4. *Независимые источники напряжения и тока.* Если в цепи действует независимый источник  $e(t)$  или  $J(t)$ , в операторной схеме замещения им соответствует источник, ЭДС или ток которого равны изображению напряжения или тока источника в исходной цепи. Источнику постоянного напряжения в операторной схеме замещения соответствует источник, ЭДС которого равна  $\frac{E}{p}$ .

Примеры расчета линейных цепей операторным методом мы рассмотрим позднее.

#### 4. Определение оригинала по известному изображению

В общем случае для отыскания оригинала можно использовать интеграл обратного преобразования Лапласа:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} I(p) e^{pt} dp.$$

Однако использование этого соотношения требует вычисления контурного интеграла с применением теоремы о вычетах Коши.

Для линейных цепей с сосредоточенными параметрами изображения токов и напряжений являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной  $p$ :

$$I(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}. \quad (16.6)$$

В этом случае для определения оригинала можно использовать формулу разложения.

Примем, что степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, т. е.  $m < n$ , а знаменатель имеет только простые корни:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Корни полинома знаменателя называют полюсами. Дробно-рациональная функция может быть разложена на сумму простых слагаемых:

$$I(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (16.7)$$

Здесь  $A_k$  – вычет функции  $I(p)$  в точке  $p = p_k$ .

Так как каждое слагаемое в формуле (16.7) является изображением экспоненциальной функции, то очевидно, что оригинал дробно-рациональной функции (16.6) имеет вид

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (16.8)$$

Равенство (16.8) называется *формулой разложения*.

Вычет  $A_k$  можно найти, умножив обе части (16.7) на  $(p - p_k)$  и полагая  $p = p_k$ . При этом правая часть будет содержать лишь искомый вычет  $A_k$ , так как все остальные слагаемые обратятся в нуль:

$$A_k = \frac{N(p)(p - p_k)}{D(p)} \Big|_{p = p_k}. \quad (16.9)$$

Можно показать, что формула (16.9) эквивалентна равенству:

$$A_k = \frac{N(p)}{D'(p)} \Big|_{p = p_k}. \quad (16.10)$$

Здесь  $D'(p)$  – производная полинома знаменателя.

Таким образом, вычет  $A_k$  в полюсе  $p_k$  определяется с помощью формулы (16.9) или (16.10). При использовании формулы (16.9) для определения вычета  $A_k$  достаточно вычеркнуть в знаменателе множитель  $(p - p_k)$  и в полученное выражение подставить значение  $p = p_k$ .

Если анализируемая цепь содержит источники постоянного напряжения или тока, то, как правило, изображение имеет полюс в начале координат, т. е. при  $p = 0$ . В этом случае его можно записать в виде

$$I(p) = \frac{N(p)}{pD_1(p)}.$$

Вычет, соответствующий полюсу в начале координат, вычисляется по формуле

$$A_0 = \frac{N(p)}{D_1(p) + pD_1'(p)} \Big|_{p=0} = \frac{N(0)}{D_1(0)}.$$

Полюсу в начале координат соответствует ступенчатая функция времени  $A_0\delta(t)$ . Здесь  $\delta(t)$  – единичная ступенчатая функция. Теперь формула разложения примет вид

$$i(t) = A_0\delta(t) + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (16.11)$$

Для упрощения записи множитель  $\delta(t)$  часто не записывают. При этом подразумевается, что все функции времени в оригинале при  $t < 0$  обращаются в нуль.

Паре комплексно-сопряженных полюсов соответствуют комплексно-сопряженные вычеты. Если полюсы  $p_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$ , то вычеты  $\dot{A}_{i,i+1} = A_i e^{\pm j\psi}$ . Поэтому комплексно-сопряженным полюсам в оригинале соответствует слагаемое

$$A_i e^{jp_i t} + A_{i+1} e^{jp_{i+1} t} = A_i e^{\alpha t} \left( e^{j(\beta t + \psi)} + e^{-j(\beta t + \psi)} \right) = 2A_i e^{\alpha t} \cos(\beta t + \psi). \quad (16.12)$$

Таким образом, если изображение имеет комплексно-сопряженные полюсы, функция времени содержит синусоидальную составляющую, затухающую (при  $\alpha < 0$ ) или возрастающую (при  $\alpha > 0$ ) с течением времени.

Итак, вычисление оригинала дробно-рациональной функции по формуле разложения выполняется в следующем порядке.

1. Определяются корни полинома знаменателя  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .
2. С помощью формул (16.9) или (16.10) вычисляются вычеты  $A_k$ .
3. В зависимости от характера полюсов оригинал записывается в виде (16.8), (16.11) или (16.12).

## 5. Примеры расчета операторным методом

В данном параграфе рассмотрены примеры использования преобразования Лапласа для анализа линейных цепей.

*Пример 16.4.* В цепи, показанной на рис. 16.4, ключ замыкается в момент времени  $t = 0$ . Значения элементов:  $R_1 = 5$  кОм,  $R_2 = 10$  кОм,  $R_3 = 5$  кОм,  $R_4 = 5$  кОм,  $C = 0.01$  мкФ.  $E = 15$  В. Определить закон изменения тока  $i_3(t)$ .

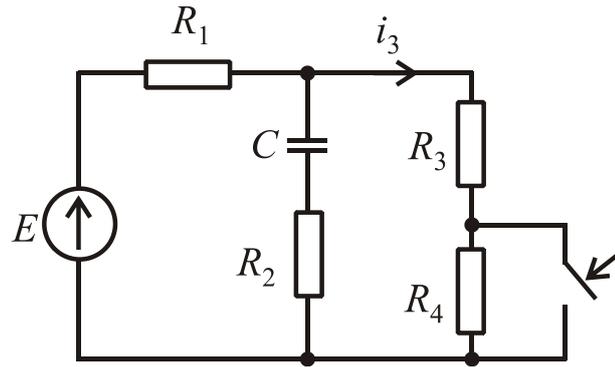


Рис. 16.4

*Решение.* Рассчитаем сначала напряжение емкостного элемента в момент, предшествующий коммутации  $u_C(0)$ . Эквивалентная схема, соответствующая моменту времени  $t = 0_-$ , показана на рис. 16.5.

Проанализировав схему на рис. 16.5, найдем, что начальное напряжение емкостного элемента  $u_C(0) = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4} E = \frac{5 + 5}{5 + 5 + 5} 15 = 10$  В.

Операторная схема замещения показана на рис. 16.6.

Изображение тока  $i_3(t)$  имеет вид

$$I_3(p) = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{1}{R_3} \frac{\frac{E}{pR_1} + \frac{u_C(0)}{p\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1.6 \cdot 10^{-3} (p + 0.75 \cdot 10^4)}{p(p + 0.8 \cdot 10^4)}.$$

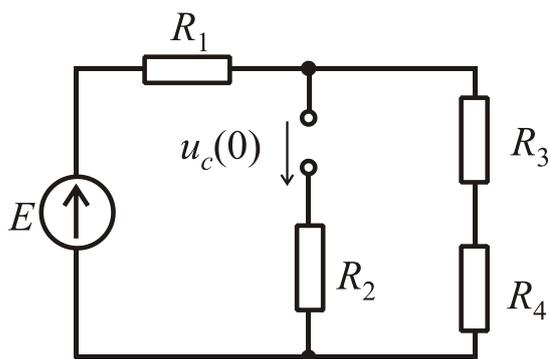


Рис. 16.5

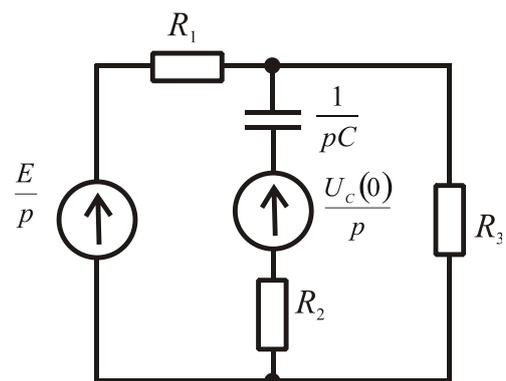


Рис. 16.6

Найдем оригинал  $i_3(t)$ . Полюсы  $I_3(p)$ :

$$p_1 = 0, p_2 = -0.8 \cdot 10^4.$$

Вычеты найдем с помощью формулы (16.9):

$$A_1 = \frac{1.6 \cdot 10^{-3} (p + 0.75 \cdot 10^4)}{(p + 0.8 \cdot 10^4)} \Big|_{p=0} = 1.5 \cdot 10^{-3}.$$

$$A_2 = \frac{1.6 \cdot 10^{-3} (p + 0.75 \cdot 10^4)}{p} \Big|_{p=-0.8 \cdot 10^4} = 0.1 \cdot 10^{-3}$$

Таким образом,

$$I_3(p) = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{p} + \frac{0.1 \cdot 10^{-3}}{p + 0.8 \cdot 10^4}.$$

Запишем закон изменения тока  $i_3(t)$ :

$$i_3(t) = A_1 \delta(t) + A_2 e^{p_2 t} = 1.5 \cdot 10^{-3} \delta(t) + 0.1 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-8000t}.$$

*Пример 16.5.* В цепи, показанной на рис. 16.7, действует источник постоянного напряжения  $E = 10$  В. Параметры цепи:  $R_1 = R_2 = 1$  Ом,  $C = 0.25$  Ф,  $L = 1.33$  Гн.

Цепь находится в установившемся режиме. В момент времени  $t = 0$  замыкается ключ, шунтирующий участок цепи с сопротивлением  $R_2$ . Требуется рассчитать операторным методом закон изменения тока  $i_1(t)$  при  $t > 0$ .

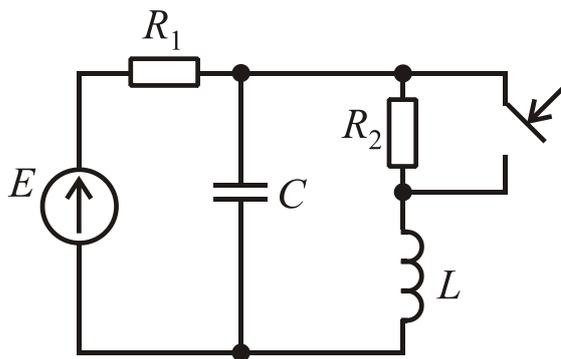


Рис. 16.7

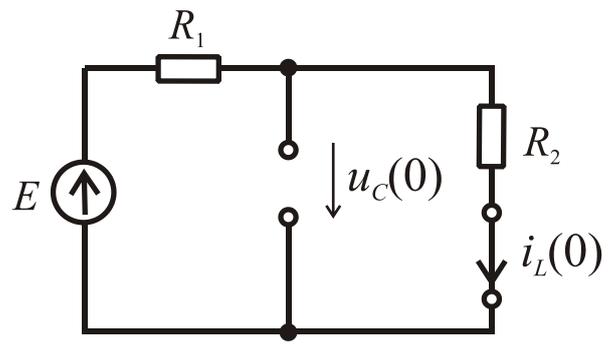


Рис. 16.8

*Решение.* Определим сначала независимые начальные условия, т. е. ток индуктивного элемента  $i_L(0)$  и напряжение емкостного элемента  $u_C(0)$ . Эквивалентная схема для момента времени  $t = 0_-$  изображена на рис. 16.8.

Анализируя схему на рис. 16.8, найдем, что  $i_L(0) = 5$  А,  $u_C(0) = 5$  В.

Операторная схема замещения показана на рис. 16.9. Найдем сначала напряжение  $U_{ab}(p)$ :

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} + Cu_C(0) - \frac{Li_L(0)}{pL}}{pC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{pL}}.$$

Ток

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p} - U_{ab}(p)}{R_1}.$$

Подставляя численные значения, имеем

$$I_1(p) = \frac{5p^2 + 20p + 30}{p(p^2 + 4p + 3)} = \frac{5p^2 + 20p + 30}{p(p+1)(p+3)}.$$

Полученное изображение представляет дробно-рациональную функцию от  $p$ . Найдем оригинал  $i_1(t)$ . Изображение  $I_1(p)$  имеет полюсы:

$$p_1 = 0; p_2 = -1; p_3 = -3.$$

Вычеты в полюсах найдем согласно (16.9):

$$A_1 = \frac{5p^2 + 20p + 30}{(p+1)(p+3)} \Big|_{p=0} = 10; \quad A_2 = \frac{5p^2 + 20p + 30}{p(p+3)} \Big|_{p=-1} = -7.5;$$

$$A_3 = \frac{5p^2 + 20p + 30}{p(p+1)} \Big|_{p=-3} = 2.5.$$

Таким образом, имеем

$$I_1(p) = \frac{10}{p} - \frac{7.5}{p+1} + \frac{2.5}{p+3}.$$

Оригинал тока  $i_1(t)$  равен

$$i_1(t) = 10 - 7.5e^{-t} + 2.5e^{-3t}.$$

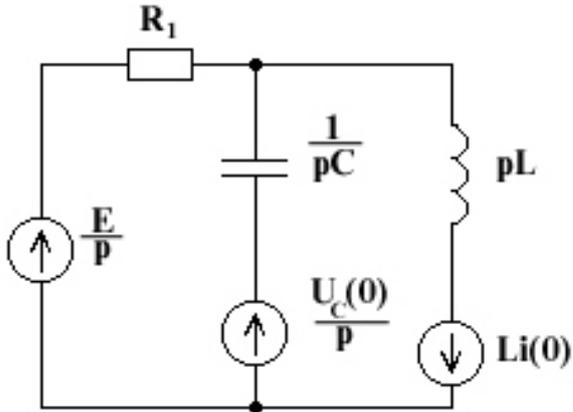


Рис. 16.9

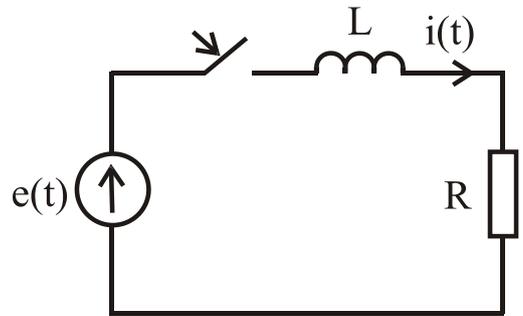


Рис. 16.10

*Пример 16.7.* Рассчитать напряжение на выходе цепи (рис. 16.11), если на входе действует одиночный прямоугольный импульс длительностью  $\tau$  (рис. 16.12).

*Решение.* Представим входное напряжение в виде суммы двух ступенчатых функций, смещенных на интервал  $\tau$  (рис. 16.13):

$$u_1(t) = \delta(t) - \delta(t - \tau).$$

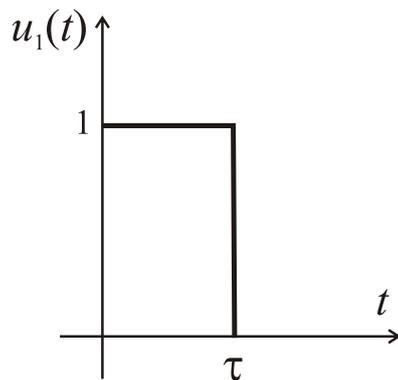


Рис. 16.11

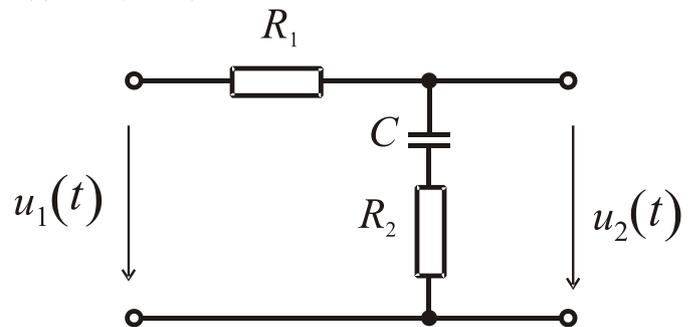


Рис. 16.12

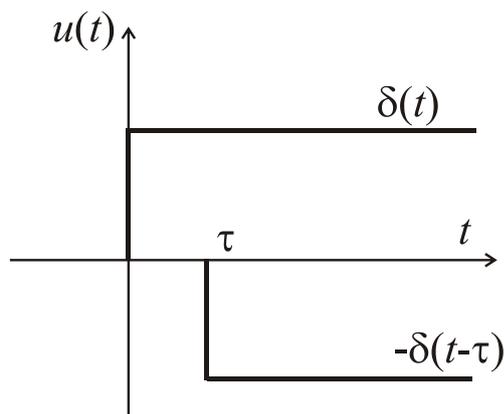


Рис. 16.13

Воспользуемся принципом наложения. Реакцией на действие единичной ступенчатой функции является переходная характеристика. Поэтому напряжение на выходе цепи равно разности переходных характеристик, смещенных на интервал  $\tau$ :

$$u_2(t) = h(t) - h(t - \tau).$$

Передаточная функция цепи:

$$H(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{p + \frac{1}{R_2 C}}{p + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}} = 0.5 \frac{p + 10^3}{p + 0.5 \cdot 10^3}.$$

Для того чтобы рассчитать переходную характеристику, определим оригинал изображения

$$\frac{1}{p} H(p) = \frac{0.5(p + 10^3)}{p(p + 0.5 \cdot 10^3)}.$$

Полюсы изображения:

$$p_1 = 0, p_2 = -0.5 \cdot 10^3.$$

Вычеты найдем с помощью формулы (16.9):  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -0.5$ .

Переходная характеристика

$$h(t) = \delta(t) - 0.5 \cdot e^{-1000t}.$$

Напряжение на выходе цепи

$$u(t) = h(t) - h(t - \tau) = \delta(t) - 0.5 \cdot e^{-1000t} - \delta(t - 0.001) + 0.5e^{-1000(t-0.001)}.$$

График выходного напряжения показан на рис. 16.14.

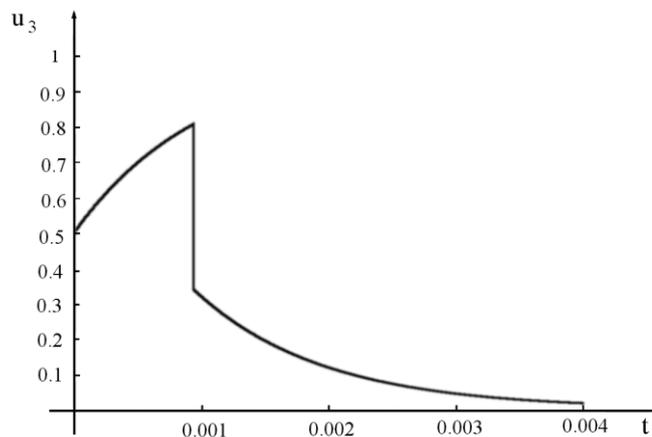


Рис. 16.14

Рассмотренные примеры показывают, что операторный метод является удобным и эффективным инструментом анализа линейных цепей при различных формах входного воздействия. Его можно рассматривать как обобщение метода комплексных амплитуд и спектрального метода на случай произвольных сигналов.

## 6. Заключение

1. Одностороннее преобразование Лапласа определяется выражением

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Здесь  $p = \sigma + j\omega t$

2. С помощью преобразования Лапласа функция времени  $f(t)$  преобразуется в функцию комплексной переменной  $F(p)$ . Функцию  $f(t)$  называют оригиналом, а  $F(p)$  – изображением.
3. Операторный метод анализа электрических цепей заключается в том, что функции времени  $f(t)$  ставится в соответствие изображение  $F(p)$ . При этом система интегродифференциальных уравнений заменяется системой алгебраических уравнений для изображений.

