Лекция 15. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

План

1. Спектры апериодических функций и преобразование Фурье.
2. Некоторые свойства преобразования Фурье.
3. Спектральный метод анализа электрических цепей.
4. Заключение.

1. Спектры апериодических функций и преобразование Фурье

Спектр периодической во времени бесконечной функции является дискретным, то есть он равен сумме гармоник, частоты которых отличаются на частоту первой гармоники $\omega_1 = 2\pi / \mathrm{T}$. Рассмотрим, каким будет спектр апериодической функции $f(t)$, имеющей конечную длительность T_1.

Для этого периодически продолжим $f(t)$ с периодом $T > T_1$ (рис. 15.1).

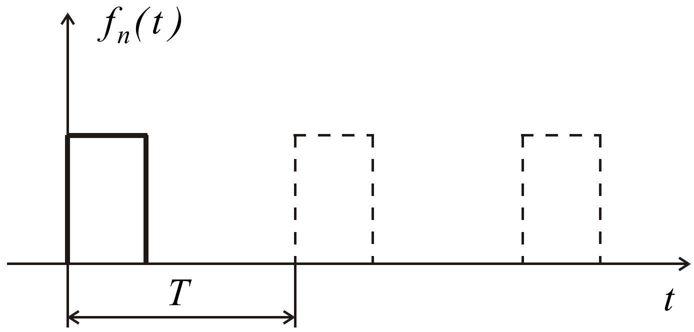

Рис. 15.1

Спектр такой периодически продолженной функции $f_n(t)$ будет дискретным. Комплексные коэффициенты ряда Фурье можно определить с помощью формулы (15.1). Разложение в ряд Фурье функции $f_n(t)$ сходится к исходной апериодической функции $f(t)$ только в пределах первого периода. При увеличении периода амплитуды гармоник, определяемые формулой

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_n(t) e^{-jn\omega_1 t} dt\,, \tag{15.1}$$

будут уменьшаться. Уменьшится и основная частота ω_1, следовательно, гармоники будут располагаться гуще. При $T \to \infty$ гармоники сольются, образуя сплошной спектр, а их амплитуды будут бесконечно малы.

Таким образом, функция конечной длительности имеет сплошной спектр. Поскольку при увеличении периода амплитуды гармоник уменьшаются и в пределе обращаются в нуль, для описания сплошного спектра удобнее рассматривать интеграл в формуле (15.1):

$$F(jn\omega_1 t) = \frac{T}{2} A_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \ . \tag{15.2}$$

При $T \to \infty$ пределы интегрирования в формуле (15.2) становятся бесконечными, а дискретная частота $n\omega_1$ – непрерывной:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \,. \tag{15.3}$$

Функцию $F(j\omega)$ называют *спектральной функцией* или *спектральной плотностью*. Формула (15.3) определяет *прямое преобразование Фурье*. С помощью прямого преобразования Фурье мы преобразуем функцию времени $f(t)$ в комплексную функцию частоты $F(j\omega)$.

Прямое преобразование Фурье существует в том случае, если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в бесконечных пределах, т. е. $\int_{\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.

Выразим теперь $f(t)$ через спектральную функцию $F(j\omega)$. Поскольку комплексная амплитуда ряда Фурье

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} F(jn\omega_1 t),$$

из (15.7) следует, что периодическая функция времени

$$f_n(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jn\omega_1) e^{in\omega_1 t} \ .$$

Учитывая, что $\mathrm{T} = 2\pi / \omega_1$, получим

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(jn\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t} \omega_1 \,. \tag{15.4}$$

В пределе при $T \to \infty$ дискретная частота $n\omega_1$ становится непрерывной, а частоту первой гармоники ω_1 можно рассматривать как дифференциал: $\omega_1 \to d\omega$. При этом сумма в формуле (15.4) превратится в интеграл, который называют *обратным преобразованием Фурье* или *интегралом Фурье*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \ . \qquad (15.5)$$

Произведение $F(j\omega)\,d\omega$ представляет «вклад» гармоники с частотой ω в функцию $f(t)$. По этой причине $F(j\omega)$ называют *спектральной функцией* или *спектральной плотностью*.

Спектральные функции являются комплексными функциями частоты ω. Их составляющие (амплитуды и фазы или вещественные и мнимые части) изображают в виде графиков. Графическое изображение спектров придает большую наглядность анализу цепей с помощью преобразования Фурье.

2. Некоторые свойства преобразования Фурье

Рассмотрим некоторые свойства функций времени и соответствующих спектральных функций. Эти свойства могут быть получены из соотношений (15.4) и (15.5).

1. Преобразование Фурье обладает свойством линейности:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(j\omega).$$

Здесь $\Rightarrow$ – знак соответствия.

2. Дифференцированию функции времени соответствует умножение спектральной плотности на $j\omega$, а интегрированию – деление на $j\omega$:

$$\frac{df(t)}{dt} \Rightarrow j\omega F(j\omega), \quad \int f(t)dt \Rightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega).$$

3. Умножению спектральных функций соответствует свертка функций времени:

$$F_1(j\omega)F_2(j\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau .$$

Формулы (15.4) и (15.5) указывают на определенное сходство между прямым и обратным преобразованиями Фурье. Поскольку $F(j\omega)$ – комплексная функция, представим ее в алгебраической форме:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = P + jQ = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt.$$

Из последнего выражения следует, что вещественная часть спектральной функции четна, а мнимая – нечетна:

$$P(j\omega) = P(-j\omega); \quad Q(j\omega) = -Q(-j\omega).$$

Учитывая, что $F(j\omega) = P(j\omega) + jQ(j\omega)$, запишем формулу обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (P + jQ)(\cos\omega t + j\sin\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} (P\cos\omega t - Q\sin\omega t) d\omega + j\int_{-\infty}^{\infty} (Q\cos\omega t + P\sin\omega t) d\omega\right]. \qquad (15.6)$$

Мнимая часть последнего выражения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (Q\cos\omega t + P\sin\omega t) d\omega = 0,$$

поскольку она является интегралом от *нечетных* функций. Вещественная часть в правой части формулы (15.6) является четной, поэтому мы можем записать:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} (P\cos\omega t - Q\sin\omega t) d\omega.$$

Полученные выражения показывают, что вещественная и мнимая части спектральной функции $F(j\omega)$, так же как амплитудный и фазовый спектры, связаны между собой. Если функция времени $f(t)$ четная, т. е. $f(t) = f(-t)$, то мнимая часть спектральной функции равна нулю:

$$Q(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = 0 .$$

Спектральная функция четной функции времени является вещественной:

$$F(j\omega) = P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt .$$

При этом функция времени

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\cos\omega t d\omega .$$

Рассмотрим возможность вычисления энергии апериодических сигналов по их спектральным функциям. Интеграл квадрата функции времени

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt . \qquad (15.7)$$

Поскольку переменные t и ω независимы, изменим порядок интегрирования в правой части (15.7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega .$$

Внутренний интеграл представляет сопряженную спектральную функцию:

$$F(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt .$$

Поскольку $F(j\omega)F(-j\omega) = |F(j\omega)|^2$, формула (15.7) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega .$$

Учитывая, что квадрат модуля $|F(j\omega)|^2$ есть четная функция частоты, запишем последнее равенство в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left|F(j\omega)\right|^2 d\omega. \qquad (15.8)$$

Формулу (15.8) называют формулой или *теоремой Рейли* (Релея). Предположим, что в резисторе сопротивлением 1 Ом ток изменяется по закону $f(t)$. Значение интеграла в левой части (15.16) пропорционально суммарной энергии, выделенной в резисторе за время действия тока. В соответствии с (15.8) эта энергия может быть вычислена путем интегрирования $f(t)$ во временной области либо путем интегрирования $\left|F(j\omega)\right|^2$ в частотной области. Функция $\left|F(j\omega)\right|^2$ характеризует плотность распределения энергии по частоте. Ее называют *спектральной плотностью энергии* сигнала, изменяющегося по закону $f(t)$. Интегрируя $\left|F(j\omega)\right|^2$ в заданном диапазоне частот, мы можем определить долю энергии сигнала, сосредоточенную в этом диапазоне.

3. Спектральный метод анализа электрических цепей

При спектральном анализе рассматриваются не изменения токов и напряжений, а изменения их спектров. Как известно, реакция линейной цепи на воздействие синусоидального сигнала заключается в изменении амплитуды и начальной фазы этого сигнала. Поскольку параметры цепи зависят от частоты, эти изменения также являются функциями частоты. Поэтому об изменении спектра сигнала удобно судить по частотным характеристикам цепи.

Рассмотрим двухполюсник, имеющий комплексное сопротивление $Z(j\omega)$. К входным зажимам двухполюсника приложено несинусоидальное напряжение $u(t)$, спектральная плотность которого равна $U(j\omega)$. В соответствии с законом Ома спектральная плотность тока

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}.$$

Далее ток как функцию времени мы можем найти с помощью обратного преобразования Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Как известно, передающие свойства четырехполюсников характеризуют передаточными функциями. Комплексной передаточной функцией называют отношение комплексной амплитуды реакции к комплексной амплитуде входного воздействия. Спектральная функция выходного напряжения

$$U_2(j\omega) = H(j\omega)U_1(j\omega).$$

Представим комплексную передаточную функцию в показательной форме:

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Из последнего равенства следует, что на частоте ω модуль выходного напряжения отличается от входного в $H(\omega)$ раз, а начальная фаза выходного напряжения от фазы входного – на угол $\varphi(\omega)$.

Расчет линейной цепи спектральным методом выполняется в следующем порядке.

1. Определяется комплексная функция цепи.
2. Находится спектр входного воздействия.
3. Вычисляется спектр реакции.
4. Определяется обратное преобразование спектра.

Спектральный метод расчета применим и в том случае, если на входе действует периодическая несинусоидальная функция. Спектр такой функции является дискретным. Обозначим комплексные амплитуды гармоник входного напряжения $\dot{U}_k^{(1)}$. Комплексная амплитуда *k*-й гармоники на выходе

$$\dot{U}_k^{(2)} = H(jk\omega_1)\dot{U}_k^{(1)}.$$

Здесь $H(jk\omega_1)$ – значение комплексной передаточной функции на частоте *k*-й гармоники. Таким образом, выходное напряжение

$$u_2(t) = \frac{U_0^{(1)}}{2}H(0) + \sum_{k=1}^{n} U_k^{(1)} \left|H(jk\omega_1)\right| \sin\left(k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1)\right).$$

Амплитуды гармоник периодической функции быстро убывают с ростом порядкового номера. Поэтому на практике ограничиваются частной суммой ряда, число гармоник которой зависит от скорости сходимости ряда и требуемой точности.

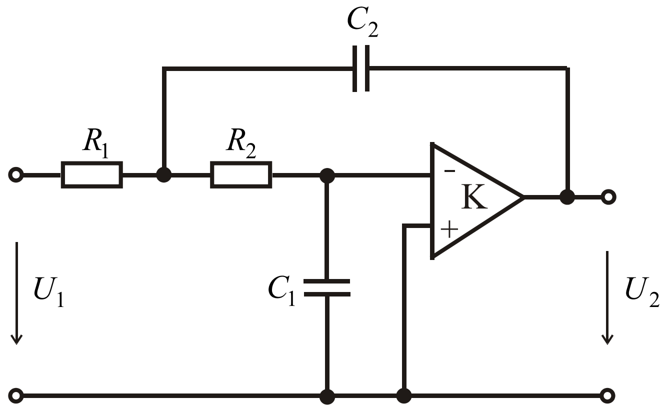

Рис. 15.2

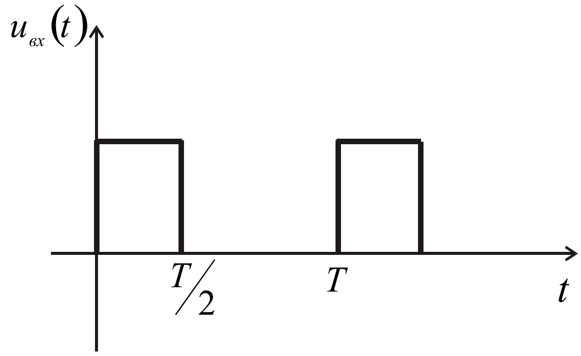

Рис. 15.3

Пример 15.1. Рассмотрим пример расчета частотным методом. Необходимо определить напряжение на выходе цепи, показанной на рис. 15.2. Элементы имеют следующие значения: $R_1 = 14{,}14$ кОм, $R_2 = 4{,}71$ кОм, $C_1 = 0{,}01$мкФ, $C_2 = 0{,}015$ мкФ. Коэффициент усиления усилителя K = 2.

Входной сигнал представляет последовательность прямоугольных импульсов с периодом $T = 3.14 \cdot 10^{-3}$ с и единичной амплитудой (рис. 15.3).

Решение. Разложение в ряд Фурье периодической функции времени

$$u_1(t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots\right) =$$

$$= 0.5 + 0.637\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots\right).$$

Частота первой гармоники

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 0.2 \cdot 10^4 \text{ рад/с}.$$

Передаточная функция рассматриваемой цепи

$$H(j\omega) = \frac{\dfrac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{-\omega^2 + j\omega\left[\dfrac{1}{R_1 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_2}(1-K)\right] + \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

Подставив значения элементов, получим

$$H(j\omega)=\frac{2\cdot 10^8}{-\omega^2+j\omega 1.414\cdot 10^4+10^8}.$$

График амплитудно-частотной характеристики показан на рис. 15.4, а на рис. 15.5 дана фазочастотная характеристика (значения ФЧХ в радианах).

Амплитуды гармоник на выходе цепи:

$A_0=1.0,\ A_1=1.274,\ A_3=0.415,\ A_5=0.182,\ A_7=0.084,\ A_9=0.042.$

Начальные фазы гармоник (в радианах):

$\varphi_1=-0.284,\quad \varphi_3=-0.92,\quad \varphi_5=-1.57,\quad \varphi_7=-2.026,\quad \varphi_9=-2.297.$

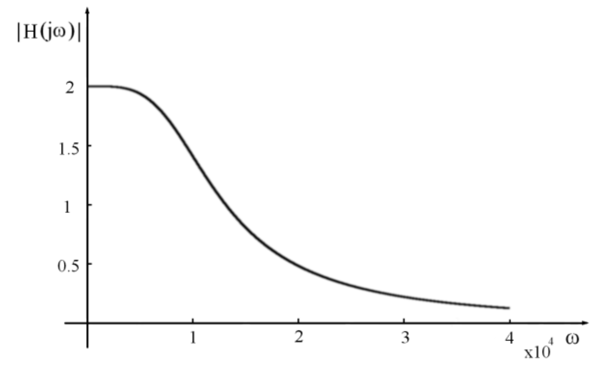

Рис. 15.4

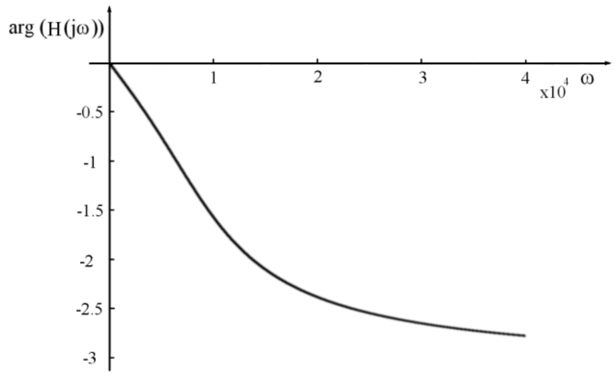

Рис. 15.5

Напряжение на выходе цепи

$$u_{\text{вых}}(t)=\sum_{n=0}^{7}A_n\sin(n\omega_1 t+\phi_n)=1+1.274\sin(\omega t-0.284)+0.415\sin(3\omega t-0.92)+$$
$$+0.182\sin(5\omega t-1.57)+0.084\sin(7\omega t-2.026)+0.042\sin(9\omega t-2.297)$$

График $u_{\text{вых}}(t)$ показан на рис. 15.6. Напряжение на выходе цепи имеет пологий фронт, а также заметный выброс (перерегулирование).

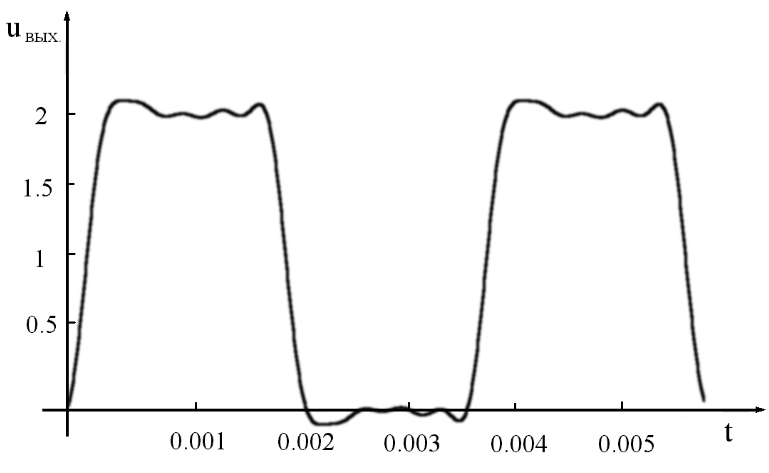

Рис. 15.16

Рассмотренный пример показывает, что реакция линейной цепи на воздействие периодического сигнала заключается в изменении амплитуд и начальных фаз гармоник, составляющих сигнал. При этом спектральный состав сигнала на выходе цепи не изменяется.

4. Заключение

1. Апериодическая функция времени имеет не дискретный, а сплошной спектр.
2. Прямое преобразование Фурье определяется формулой:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt .$$

   Функцию $F(j\omega)$ называют спектральной функцией или спектральной плотностью.
3. С помощью прямого преобразования Фурье мы преобразуем функцию времени $f(t)$ в комплексную функцию частоты $F(j\omega)$.
4. Расчет линейной цепи спектральным методом выполняется в следующем порядке.
   - определяется комплексная функция цепи;
   - находится спектр входного воздействия;
   - вычисляется спектр реакции;
   - определяется обратное преобразование спектра реакции.