Лекция 14. ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Тригонометрическая форма ряда Фурье.
2. Комплексная форма ряда Фурье.
3. Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции.
4. Заключение.

1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

В электронных цепях, которые служат для передачи информации, напряжения и токи несинусоидальны. Методы расчета синусоидальных режимов для таких цепей неприменимы. При расчетах линейных цепей несинусоидального тока используют представление периодической функции $f(t)$ в виде суммы гармоник кратных частот. Если цепь линейна, то мы можем рассчитать ее для каждой гармоники в отдельности, используя символический метод, а затем просуммировать полученный результат.

Если периодическая несинусоидальная функция отвечает условиям Дирихле, она может быть представлена гармоническим рядом Фурье. Ряд Фурье в тригонометрической форме имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)). \qquad (14.1)$$

Здесь $\omega_1 = (2\pi / T)$ – угловая частота первой гармоники. Коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt, \qquad (14.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt. \qquad (14.3)$$

В формуле (14.1) $a_0 / 2$ – постоянная составляющая, равная среднему значению функции $f(t)$ за период:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \qquad (14.4)$$

Объединение синуса и косинуса одной частоты в выражении (14.1) дает

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \psi_n).$$

Здесь $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\psi_n = arctg(a_n / b_n)$.

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называют дискретным частотным спектром. Дискретным его называют потому, что частоты соседних гармоник отличаются друг от друга на частоту первой гармоники. Совокупность амплитуд гармоник называют *амплитудным спектром*, а совокупность начальных фаз – *фазовым спектром*.

По амплитудному спектру можно судить не только об амплитудах, но и о мощности несинусоидального колебания. Предположим, что ток резистивного элемента сопротивлением 1 Ом изменяется по закону $f(t)$. Мгновенная мощность, выделяемая в резисторе

$$p(t) = i^2 R = f^2(t) = \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \psi_n)\right]^2.$$

Активная мощность равна среднему значению мгновенной мощности:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt.$$

Если вместо $f(t)$ подставить разложение в ряд Фурье, то интеграл разложится на ряд интегралов, дающих средние мощности отдельных гармоник:

$$P = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}. \qquad (14.5)$$

Итак, средняя мощность несинусоидального колебания равна сумме средних мощностей отдельных гармоник. Соотношение (14.5) называют *равенством Парсеваля*. Из этого равенства следует, что с ростом порядкового номера амплитуды гармоник уменьшаются.

В случае если периодическая функция обладает каким-либо видом симметрии, это облегчает разложение в ряд Фурье, поскольку некоторые гармоники могут отсутствовать. Рассмотрим конкретные виды симметрии.

Случай 1. Функция $f(t)$ симметрична относительно оси ординат (рис.14.1): $f(t) = f(-t)$.

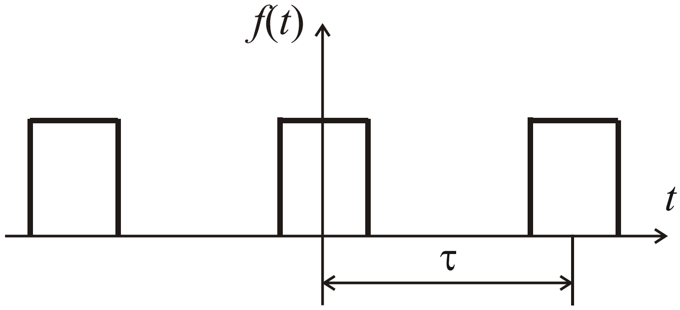


Рис. 14.1

Такие функции называют *четными*. Разложение в ряд Фурье четной функции содержит только косинусы:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t).$$

Это свойство следует из формулы (14.3). Поскольку синусоида - нечетная функция аргумента, то сумма любого количества синусоид также будет нечетной функцией. Следовательно, разложение в тригонометрический ряд четной функции не должно содержать синусных составляющих. Следовательно, коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \ \dots \ .$$

Случай 2. Функция $f(t)$ симметрична относительно начала координат (рис.14.2): $f(t) = f(-t)$.

В этом случае разложение $f(t)$ в ряд Фурье содержит только синусные составляющие:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t).$$

Это свойство следует из формулы (14.2).

Случай 3. Функция $f(t)$ симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени, т. е. $f(t) = -f(t + T/2)$.

При разложении функции $f(t)$ в ряд Фурье получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right) =$$

$$= -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_1 \left(t + \frac{T}{2} \right)) + b_n \sin(n\omega_1 \left(t + \frac{T}{2} \right)) \right).$$

Из последнего равенства следует, что четные гармоники, а также $a_0/2$ равны нулю, т. е. $a_n = b_n = 0, n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots$. Примером такой функции может служить последовательность прямоугольных импульсов (рис. 14.3). Разложение в ряд Фурье такой функции содержит только нечетные гармоники:

$$f(t) = \frac{4U}{\pi}\left(\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \ldots\right).$$

Здесь U – амплитуда прямоугольных импульсов.

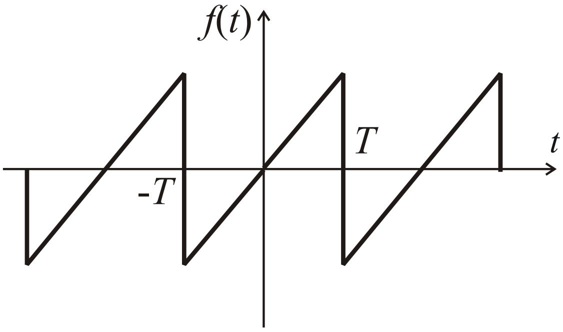


Рис. 14.2

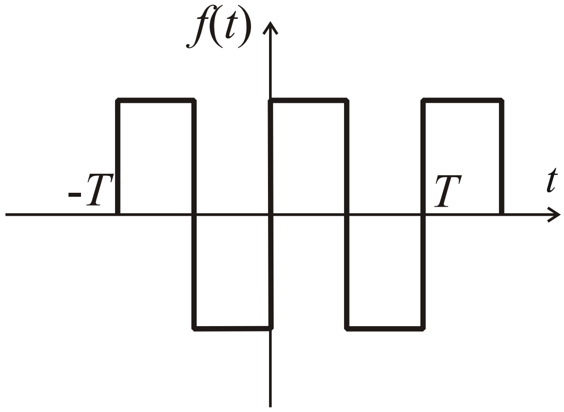


Рис. 14.3

Заметим, что при переносе начала отсчета график функции может оказаться симметричным относительно начала координат или относительно оси ординат. Это приведет к изменению начальных фаз гармоник. Однако изменить состав гармоник с помощью переноса начала отсчета нельзя.

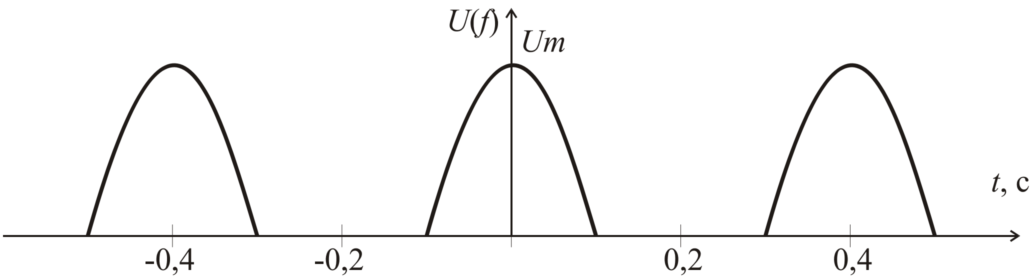


Рис. 14.4

Пример 14.1. Разложить в тригонометрический ряд периодическую функцию, имеющую форму напряжения на выходе однополупериодного выпрямителя (рис. 14.4).

Решение. Из рис. 14.4 нетрудно определить, что период повторения импульсов Т = 0.4 с. Частота первой гармоники $\omega_1 = 2\pi/T = 2\pi/0.4 = 5\pi$ рад/с. В пределах периода напряжение $u(t)$ определяется выражениями

$$u(t) = \begin{cases} 0, -0.2 \le t \le -0.1 \\ U_m \cos 5\pi t, -0.1 \le t \le 0.1 \\ 0, 0.1 \le t \le 0.2 \end{cases}$$

Поскольку функция времени на рис. 14.4 четная, разложение в ряд Фурье не содержит синусных составляющих. Определим коэффициенты ряда с помощью формул (14.2) и (14.4). Учтем, что $u(t)$ отличается от нуля только на интервале от -0.1 до 0.1. Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} U_m \cos 5\pi t dt = \frac{U_m}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{0.2}\int_{-0.1}^{0.1} U_m \cos 5\pi t \cos 5n\pi dt = \frac{5U_m}{2}\int_{-0.1}^{0.1}[\cos 5\pi(n+1)t + \cos 5\pi(n-1)t]dt$$

При $n = 1$

$$a_1 = \frac{5U_m}{2}\int_{-0.1}^{0.1}[\cos 10\pi t + 1]dt = \frac{1}{2}U_m.$$

При $n \ne 1$

$$a_n = \frac{5U_m}{2}\int_{-0.1}^{0.1}[\cos 5\pi(n+1)t + \cos 5\pi(n-1)t]dt = \frac{2}{\pi}U_m \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{1-n^2}.$$

Итак, разложение в ряд Фурье функции времени, показанной на рис. 14.4, имеет вид

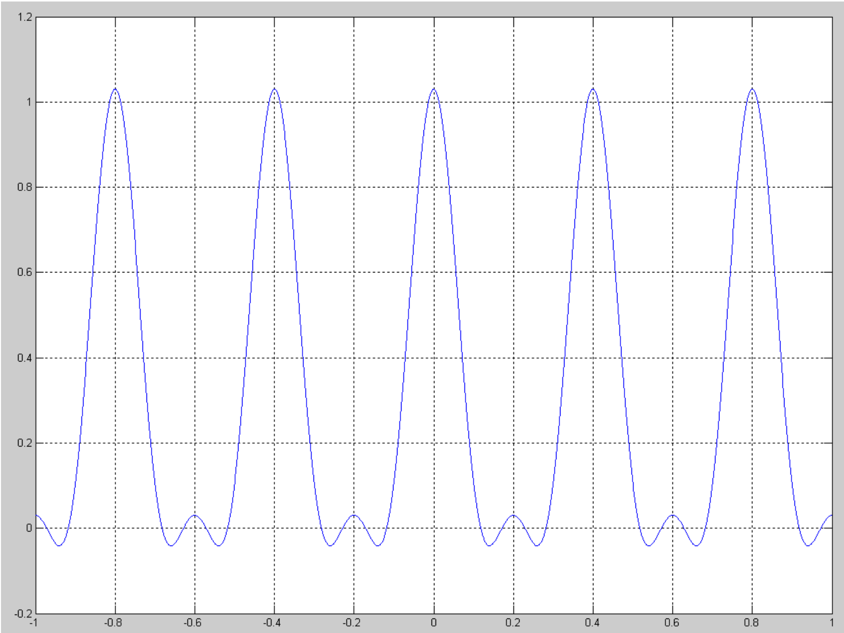
$$u(t) = U_m\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 5\pi t + \frac{2}{3\pi}\cos 10\pi t - \frac{2}{15\pi}\cos 20\pi t + \frac{2}{35\pi}\cos 30\pi t - \cdots\right].$$

На рис. 14.5, а, б показаны графики функций, полученных путем суммирования первых трех и пяти членов ряда соответственно.

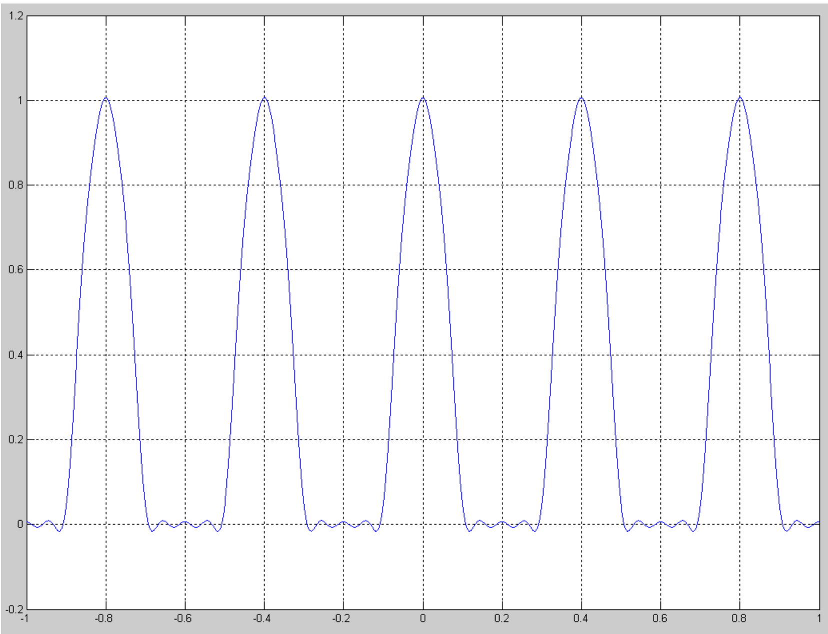
Расчет линейной цепи при периодическом несинусоидальном воздействии основан на использовании принципа наложения. Он выполняется в три этапа.

На первом этапе выполняется разложение несинусоидального воздействия в ряд Фурье. В результате определяются амплитуды и начальные фазы гармоник.

На втором этапе производится расчет цепи для каждого из слагаемых гармонического ряда. Он не отличается от обычного расчета при синусоидальных воздействиях. Этот расчет повторяют столько раз, сколько гармоник необходимо сохранить для получения необходимой точности решения. При расчете цепи на действие отдельных гармонических составляющих следует пользоваться символическим методом.



а



б

Рис. 14.5

Теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число слагаемых. Однако обычно он быстро сходится. Поэтому для получения требуемой степени точности достаточно рассмотреть небольшое число гармоник.

Далее частные решения, полученные на втором этапе, суммируются для того, чтобы определить форму искомых напряжений и токов. При необходимости рассчитываются действующие значения этих величин.

2. Комплексная форма ряда Фурье. Комплексный частотный спектр

Анализ линейных цепей при воздействии периодических сигналов несинусоидальной формы заключается в многократном расчете цепи при воздействии каждой гармоники в отдельности. Поскольку основным методом расчета цепей синусоидального тока является символический метод, ряд Фурье удобно представлять в комплексной форме. В этом случае мы можем использовать метод комплексных амплитуд для расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.

Представим функции $\sin(n\omega_1 t)$ и $\cos(n\omega_1 t)$ известными равенствами:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}; \ \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{j2} . \qquad (14.6)$$

Подставив последние равенства в соотношение (14.1), получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega_1 t}). \qquad (14.7)$$

С помощью формул (14.2) и (14.3) нетрудно показать, что коэффициент a_n – четная, а b_n – нечетная функция индекса *n*, т. е. $a_n = a_{-n}$, $b_n = -b_{-n}$. Поэтому элемент $-jb_n$ можно рассматривать как слагаемое с отрицательным индексом. Изменив нижний предел суммирования в формуле (14.7) на $-\infty$, получим

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} .$$

Здесь $\dot{A}_n = a_n - jb_n$ – комплексный коэффициент ряда Фурье. Представим $\dot{A}_n$ в показательной форме: $\dot{A}_n = A^{j\psi}$. Здесь $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\Psi_n = -\mathrm{arctg}\left(b_n / a_n\right)$.

В соответствии с (14.3) при $n = 0$ $b_0 = 0$ и $(a_n - jb_n)/2 = a_0/2$.

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} \quad . \tag{14.8}$$

Формула (14.8) имеет простую геометрическую интерпретацию. В соответствии с ней каждая гармоника может быть представлена в виде полусуммы двух векторов, вращающихся навстречу друг другу с угловой скоростью $n\omega_1$ (рис. 14.7). Амплитуды этих векторов A_n, а начальные фазы равны Ψ_n.

Совокупность комплексных коэффициентов гармоник $\dot{A}_n$ называют *комплексным частотным спектром* функции $f(t)$. Амплитуды гармоник A_n образуют *амплитудный спектр*, а начальные фазы Ψ_n – *фазовый спектр*.

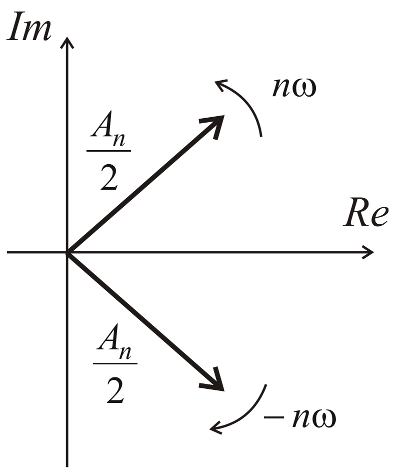


Рис. 14.6

Периодическая функция времени $f(t)$ имеет дискретный спектр, поскольку такую функцию можно представить в виде суммы гармоник с частотами, кратными частоте первой гармоники $\omega_1 = 2\pi/T$. Спектр функции времени может быть выражен аналитически, а также изображен в виде графика, связывающего амплитуды и частоты гармоник.

Выведем теперь соотношение, определяющее комплексные амплитуды гармоник. В соответствии с (14.2) и (14.3)

$$\dot{A}_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\big(\cos(n\omega_1 t) - j\sin(n\omega_1 t)\big)dt .$$

С помощью равенств (14.5) получим

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left(\frac{(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})}{2} - \frac{(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})}{2}\right)dt\,.$$

Из последнего выражения следует, что комплексный коэффициент ряда Фурье

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt\,. \qquad (14.9)$$

Если функция $f(t)$ – вещественная, то из формулы (14.8) следует, что комплексная амплитуда $\dot{A}_{-n} = A^*{}_n$ комплексно-сопряженная, а амплитудный спектр – симметричный.

Если функция времени $f(t)$ обладает каким-либо видом симметрии, определение комплексных коэффициентов ряда упрощается. Так, если $f(t)$ − четная функция, комплексный коэффициент ряда Фурье определяется формулой

$$\dot{A}_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t dt\,.$$

Множитель 4 появился в последнем выражении потому, что интегрирование выполняется за половину периода.

Если $f(t)$ нечетная, то комплексный коэффициент ряда Фурье

$$\dot{A}_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t dt\,.$$

Пример 14.2. Найти комплексный частотный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов единичной амплитуды (рис. 14.7). Длительность импульса равна τ, период повторения Т.

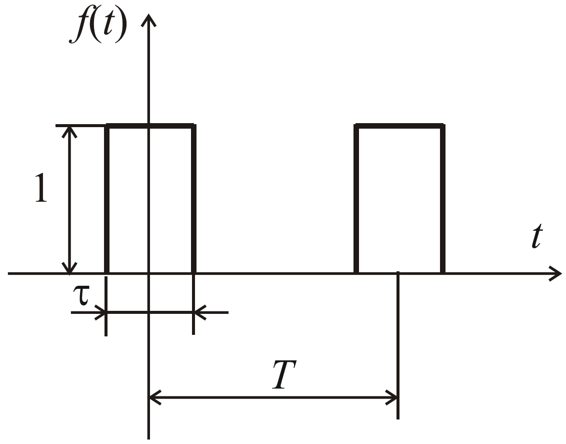


Рис. 14.7

В соответствии с (14.9) комплексные коэффициенты гармоник

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1\cdot e^{-jk\omega_1 t}dt = \frac{2\tau}{T}\frac{\sin(k\omega_1\,\tau/2)}{k\omega_1\,\tau/2}.$$

Здесь k – порядковый номер гармоники. Из последней формулы следует, что амплитуды гармоник изменяются по закону $\sin x/x$. Учитывая, что $\omega_1 = 2\pi/T$, получим

$$\dot{A}_k = \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi\,\tau/T).$$

Узлы огибающей амплитудного спектра соответствуют тем номерам гармоник, которые обращают функцию $\sin(k\pi\,\tau/T)$ в нуль. Амплитудный спектр для случая, когда отношение длительности импульса к периоду равно 1/4, показан на рис. 14.8. Пунктиром обозначена огибающая амплитудного спектра. На рис. 14.9 показан фазовый спектр рассматриваемой функции времени.

Для рассматриваемого случая ($\tau/T = 1/4$) узлы огибающей расположены на частотах, соответствующих гармоникам с порядковыми номерами $k = 4n,\quad n = 1, 2, \ldots$. Аргументы $\dot{A}_k$ равны нулю в тех интервалах, где синус положителен, либо равны π в интервалах, где синус отрицателен. Число гармоник в интервале между узлами огибающей равно T/τ. С увеличением периода линии спектра располагаются гуще, их число в интервале увеличивается, а амплитуды уменьшаются. Однако частоты узлов, а следовательно, и форма огибающей зависят только от длительности импульсов τ. Можно показать, что угловые частоты, соответствующие узлам огибающей, кратны отношению $2\pi/\tau$.

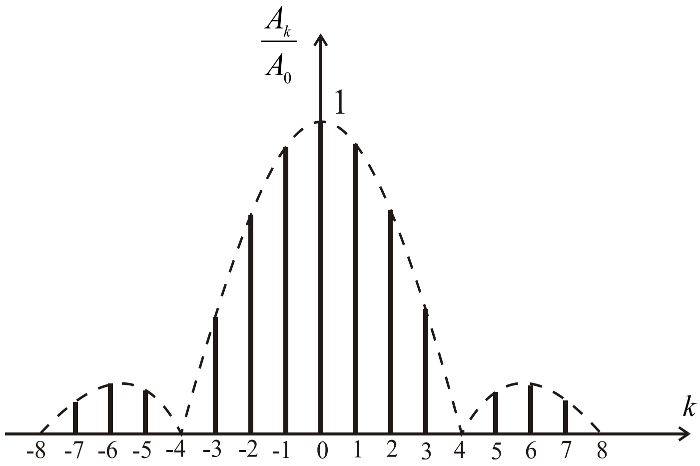


Рис. 14.8

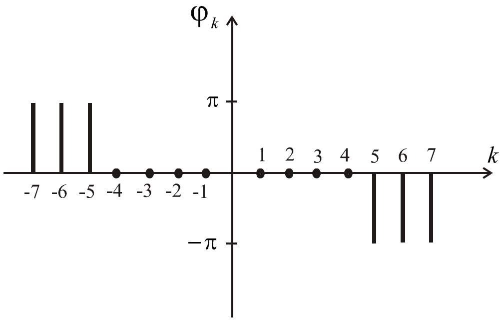


Рис. 14.9

Часто при изображении амплитудных спектров откладывают не амплитуды гармоник, а их относительные значения, равные отношению амплитуд соответствующих гармоник к постоянной составляющей или первой гармонике. Это позволяет сохранить масштаб по оси ординат одинаковым при изменении периода T.

4. Заключение

1. Если периодическая несинусоидальная функция отвечает условиям Дирихле, она может быть представлена гармоническим рядом Фурье.
2. Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называют дискретным частотным спектром. Дискретным его называют потому, что частоты соседних гармоник отличаются друг от друга на частоту первой гармоники. Совокупность амплитуд гармоник называют амплитудным спектром, а совокупность начальных фаз – фазовым спектром.
3. Поскольку основным методом расчета цепей синусоидального тока является символический метод, ряд Фурье удобно представлять в комплексной форме.
4. Совокупность комплексных коэффициентов гармоник $\dot{A}_n$ называют комплексным частотным спектром периодической функции $f(t)$.
5. Спектр функции времени может быть выражен аналитически, а также изображен в виде графика, связывающего амплитуды и частоты гармоник.