Лекция 31

АНАЛОГОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

План

1. Общие сведения об электронных фильтрах.
2. Передаточные функции аналоговых фильтров.
3. Пассивные *LC*-фильтры.
5. Активные *RC*-фильтры.
4. Выводы.

1. Общие сведения об электронных фильтрах

Электронный фильтр – это частотно-избирательное устройство, которое служит для передачи (пропускания) сигналов в заданном диапазоне частот (полосе пропускания) и подавления сигналов в других диапазонах частот (полоса задерживания). Фильтры широко используются в системах связи, в схемах защиты электронных систем от помех.

Различают аналоговые фильтры, в которых обрабатываемый сигнал имеет аналоговую форму, и цифровые фильтры, предназначенные для обработки цифровых сигналов. В настоящей главе рассматриваются аналоговые фильтры.

Классификация фильтров. Фильтры принято классифицировать по следующим признакам.

По виду амплитудно-частотной характеристики (АЧХ): фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающие или полосовые (ПП), полосно-задерживающие (ПЗ).

По типам элементов, используемых для реализации: пассивные *LC*-фильтры, активные *RC*-фильтры, фильтры на переключаемых конденсаторах и т. д.

На рис. 31.1, *а–г* показаны идеальные АЧХ фильтров: нижних частот, верхних частот, полосно-пропускающего и полосно-задерживающего.

Цепь, состоящая из конечного числа элементов, не может реализовать идеальные характеристики, показанные на рис. 31.1. Амплитудно-частотная характеристика реального фильтра нижних частот показана на рис. 31.2.

Поскольку с помощью реальной цепи невозможно реализовать постоянную амплитудно-частотную характеристику, задают максимальное отклонение АЧХ в полосе пропускания $A_{\max}$. В полосе задерживания задается минимальная величина ослабления сигнала $A_{\min}$.

Физически реализуемый фильтр всегда имеет переходную полосу между полосами пропускания и задерживания. Она расположена между частотой среза ω_c и граничной частотой полосы задерживания ω_s. Отношение ω_s/ω_c характеризует избирательность фильтра.

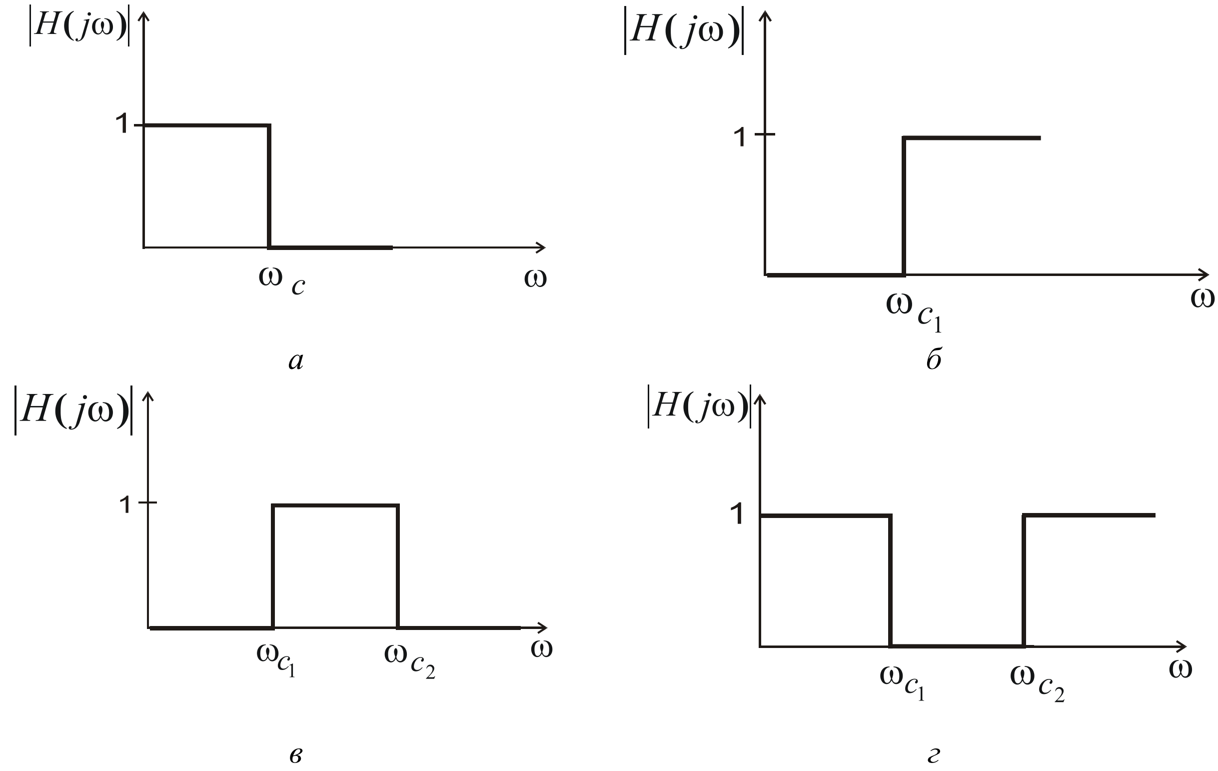

Рис. 31.1

Итак, амплитудно-частотная характеристика фильтра нижних частот определяется следующими параметрами:

1) частотой среза ω_c;

2) максимальным отклонением в полосе пропускания A_{max};

3) граничной частотой полосы пропускания ω_s;

4) минимальным затуханием в полосе задерживания A_{min}.

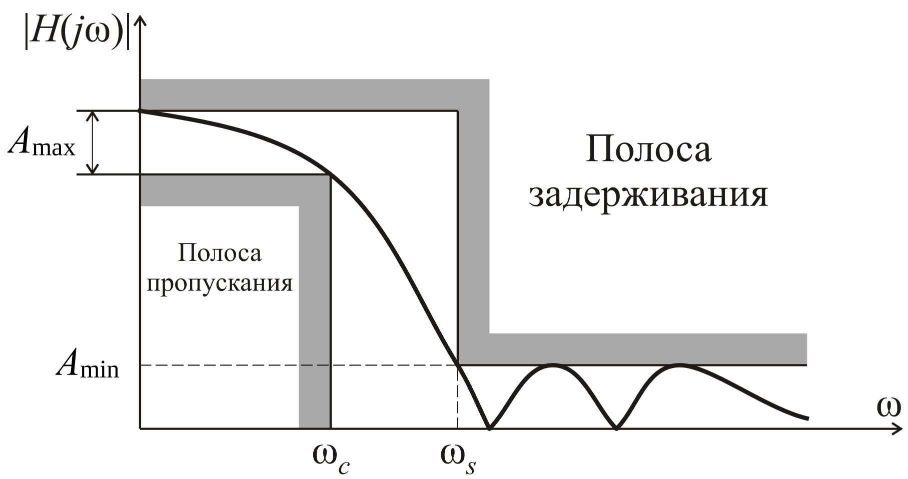

Рис. 31.2

2. Передаточные функции аналоговых фильтров

Аналоговый фильтр представляет линейную частотно-селективную цепь, поведение которой определяется операторной передаточной функцией $H(p)$. Операторная передаточная функция – отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов:

$$H(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}. \tag{31.1}$$

Здесь $U_1(p), U_2(p)$– изображения напряжений на входе и выходе фильтра (рис. 31.3), p – комплексная частотная переменная.

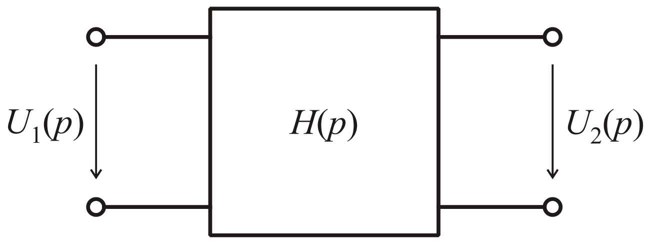

Рис. 31.3

Известно, что передаточная функция линейной цепи является дробно-рациональной, т. е. представляет отношение двух полиномов от комплексной переменной p:

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}. \tag{31.2}$$

Полагая в (31.2) $p = j\omega$, получаем комплексную передаточную функцию, определяющую реакцию фильтра на гармоническое воздействие:

$$H(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}=\frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0}. \tag{31.3}$$

Представим передаточную функцию в показательной форме:

$$H(j\omega)=\left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Модуль комплексной передаточной функции – амплитудно-частотная характеристика, а ее аргумент – фазочастотная характеристика.

Числитель и знаменатель $H(p)$ можно записать в виде произведения сомножителей первого порядка:

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=K\frac{(p-p_1^{/})(p-p_2^{/})\ldots(p-p_m^{/})}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}.$$

Корни полинома числителя $p_i^{/}$ называют *нулями*, а корни полинома знаменателя p_j – *полюсами* передаточной функции. Расположение полюсов и нулей $H(p)$ на комплексной плоскости определяет поведение цепи как в частотной, так и во временной областях. В частности, от расположения полюсов и нулей зависит форма частотных характеристик фильтра. Как правило, нули передачи частотно-селективных фильтров расположены на мнимой оси, включая начало координат и бесконечность. Каждой паре нулей на мнимой оси соответствует множитель $\left(p^2+(\omega_i')^2\right)$ в числителе $H(p)$. Нулю в начале координат соответствует множитель p. Число нулей в бесконечности в общем случае равно разности степеней числителя и знаменателя передаточной функции.

В простейших случаях нули передачи расположены в начале координат (ФВЧ) или в бесконечности (ФНЧ). Такие фильтры имеют меньшую селективность, чем фильтры с нулями передачи на мнимой оси. Однако уменьшение селективности окупается значительным упрощением структуры цепи, реализующей передаточную функцию с нулями в начале координат или бесконечности.

Пример 31.1. Полюсы передаточной функции второго порядка $p_{1,2}=-(1/2)\pm j\left(\sqrt{3}/2\right)$, АЧХ равна 1 при $\omega=0$ и равна 0 при $\omega=2$. Записать в аналитической форме передаточную функцию $H(p)$.

Решение. Передаточная функция имеет пару комплексно-сопряженных полюсов и два нуля передачи на мнимой оси на частоте $\omega=\pm 2$. Поэтому

$$H(p)=0{,}25\frac{p^2+4}{p^2+p+1}.$$

Постоянный множитель, равный 0.25, необходим для того, чтобы обеспечить условие $H(0)=1$.

Процедура синтеза электронного фильтра включает два основных этапа. Первым этапом является *аппроксимация* – процедура получения передаточной функции, с заданной точностью воспроизводящей заданные частотные или временные характеристики. Передаточная функция, найденная на этапе аппроксимации, затем реализуется электрической цепью.

В общем случае для получения передаточной функции, обеспечивающей заданную форму частотннх характеристик, используют методы оптимизации. На практике часто используют типовые передаточные функции, имеющие аналитическое решение. Перечислим наиболее распространенные передаточные функции, аппроксимирующие. АЧХ фильтра нижних частот.

1. Фильтр Баттерворта с максимально плоской амплитудно-частотной характеристикой.

2. Фильтр Чебышева с равноволновой характеристикой в полосе пропускания.

3. Инверсный фильтр Чебышева с равноволновой характеристикой в полосе задерживания.

4. Эллиптический фильтр, имеющий равноволновые характеристики в полосе пропускания и полосе задерживания.

5. Фильтр Бесселя с фазочастотной характеристикой, близкой к линейной.

Рассмотрим подробнее передаточные функции Баттерворта и Чебышева. Нули передачи этих функций расположены в бесконечности, что значительно упрощает их реализацию.

Фильтры Баттерворта. Передаточная функция фильтра нижних частот Баттерворта *n*-го порядка характеризуется выражением

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}. \tag{31.4}$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта обладает следующими свойствами:

1. При любом порядке *n* значение АЧХ $\left|H(j0)\right| = 1$.
2. На частоте среза ω_c $\left|H(j\omega_c)\right| = 0.7$.

АЧХ фильтра монотонно убывает с ростом частоты. По этой причине фильтры Баттерворта называют фильтрами с максимально плоскими характеристиками. На рис. 31.4 показаны графики амплитудно-частотных характеристик фильтров Баттерворта 3 и 5 порядков. Очевидно, что чем больше порядок фильтра, тем точнее аппроксимируется АЧХ идеального фильтра нижних частот.

Порядок передаточной функции *n* выбирают из условия обеспечения требуемого затухания в полосе задерживания на частоте $\omega > \omega_c$. Модуль передаточной функции в полосе задерживания

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^{2n}}} \approx \frac{1}{\omega^n}.$$

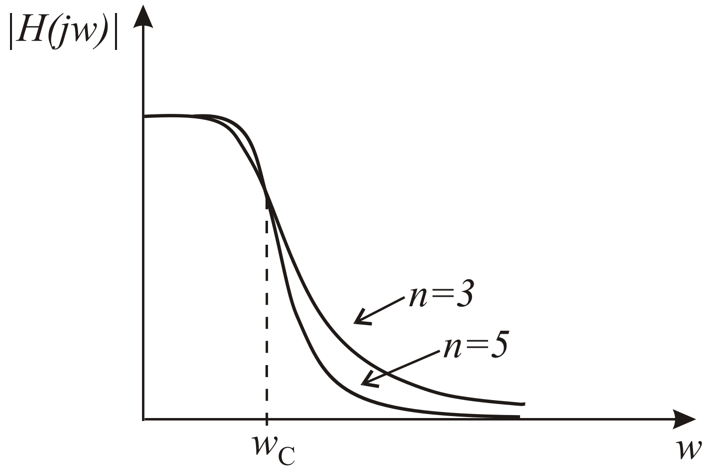

Рис. 31.4

Порядок передаточной функции определяется приближенной формулой

$$n = 20\lg\left|H(j\omega)\right| / 20\lg(\omega/\omega_c). \qquad (31.5)$$

Здесь ω – частота в полосе задерживания, на которой задана величина затухания. Значение *n*, полученное с помощью формулы (31.5), округляется до ближайшего целого, большего *n*.

Пример 31.2. Определить порядок фильтра Баттерворта, у которого значение АЧХ на частоте, равной $2\omega_c$, не превышает 0.01.

Решение. В соответствии с (31.5) $n = 20\lg 0.1/20\lg(2) = 3.32$. Округляя до ближайшего большего целого, получаем, что такое ослабление в полосе задерживания обеспечивает фильтр Баттерворта четвертого порядка.

Определяем координаты полюсов фильтра Баттерворта, полагая в (31.4) $\omega^2 = -p^2$:

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1+(-1)^n p^{2n}}.$$

Приравняв полином знаменателя нулю, найдем, что полюсы фильтра Баттерворта с частотой среза $\omega_c = 1$ рад/с расположены на окружности единичного радиуса на одинаковом угловом расстоянии друг от друга:

$$p_k = -\sin\frac{2k-1}{2n}\pi + j\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Каждая пара комплексных сопряженных полюсов образует множитель

$$p^2 + p \cdot 2\sin\frac{2k-1}{2n}\pi + 1 .$$

Фильтры Чебышева. Квадрат модуля передаточной функции фильтра Чебышева определяется выражением

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)}. \qquad (31.6)$$

Здесь $T_n(\omega)$ – полином Чебышева порядка *n*; ε – коэффициент, определяющий неравномерность АЧХ в полосе пропускания.

Рассмотрим основные свойства полиномов Чебышева[1]. Первые четыре полинома Чебышева имеют вид:

$$T_0(\omega) = 1; \quad T_1(\omega) = \omega;$$

$$T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1; \quad T_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega.$$

Полином Чебышева порядка $n \geq 2$ может быть получен с помощью рекуррентной формулы

$$T_n(\omega) = 2\omega T_{n-1}(\omega) - T_{n-2}(\omega).$$

Анализ поведения полиномов Чебышева показывает, что на интервале $-1 \leq \omega \leq 1$ полином $T_n(\omega)$ *n* раз принимает значения, равные нулю, и *n*+1 раз достигает значений, равных +1 или –1 и чередующихся друг с другом. Вне интервала $-1 \leq \omega \leq 1$ полином $T_n(\omega)$ монотонно возрастает.

В соответствии с (31.6) модуль передаточной функции фильтра Чебышева равен единице на тех частотах, где полином $T_n(\omega)$ обращается в нуль.

Перечислим свойства фильтров Чебышева.

1. В полосе пропускания АЧХ имеет равноволновой характер. На интервале $-1 \leq \omega \leq 1$ имеется *n* точек, в которых функция $\left|H(j\omega)\right|^2$ достигает максимального значения, равного 1, или минимального значения, равного $1/\left(1+\varepsilon^2\right)$. Если *n* нечетно, $\left|H(j0)\right|^2 = 1$, если *n* четно, $\left|H(j0)\right| = 1/\sqrt{\left(1+\varepsilon^2\right)}$.

2. Значение АЧХ фильтра Чебышева на частоте среза равно

---

[1] Эти полиномы были получены русским математиком П. Л. Чебышевым в результате решения задачи наилучшего приближения функций.

$$H(j\omega_C) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

3. При $\omega \geq 1$ функция $|H(j\omega)|^2$ монотонно убывает и стремится к нулю.

4. Параметр ε определяет неравномерность АЧХ фильтра Чебышева в полосе пропускания:

$$A_{\max} = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\right).$$

График амплитудно-частотной характеристики фильтра Чебышева пятого порядка показан на рис. 31.5. Сравнение АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева показывает, что фильтр Чебышева обеспечивает большее ослабление в полосе пропускания, чем фильтр Баттерворта такого же порядка. Недостаток фильтров Чебышева заключается в том, что их фазочастотные характеристики в полосе пропускания значительно отличаются от линейных.

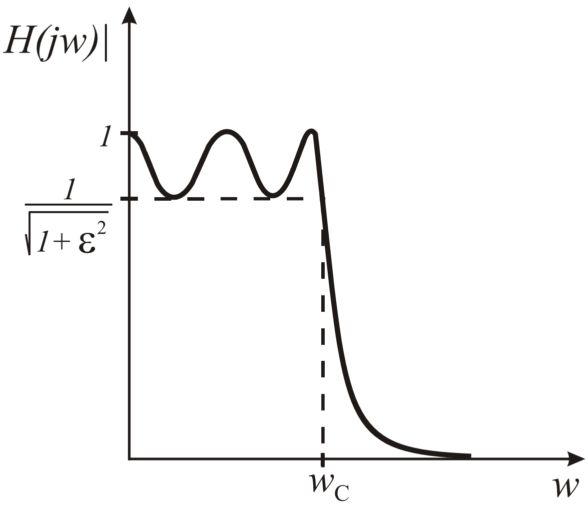

Рис. 31.5

Для фильтров Баттерворта и Чебышева имеются подробные таблицы, в которых приведены координаты полюсов и коэффициенты передаточных функций различных порядков.