Лекция 4

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

План

1. Принцип наложения (суперпозиции).
2. Теорема об эквивалентном двухполюснике.
3. Метод эквивалентного генератора.
4. Характеристики эквивалентного двухполюсника.
5. Заключение.

1. Принцип наложения (суперпозиции). Метод наложения

Токи и напряжения в электронных цепях представляют реакции или отклики на приложенные воздействия. Воздействиями являются токи и напряжения независимых источников.

Фундаментальным свойством линейных цепей является принцип наложения (суперпозиции). Он формулируется следующим образом: *реакция линейной цепи при одновременном действии нескольких независимых источников равна сумме реакций, получающихся при действии каждого источника в отдельности*.

Для того чтобы показать справедливость этого принципа, рассмотрим линейную цепь произвольной структуры, имеющую $n+1$ узел (рис. 4.1). Узловые уравнения цепи имеют вид

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix}. \qquad (4.1)$$

В соответствии с правилом Крамера напряжение k-го узла

$$V_k = \frac{D_k}{D}.$$

Здесь D – определитель системы уравнений (4.1), а D_k – определитель, получающийся из определителя D при замене k-го столбца правой частью системы уравнений.

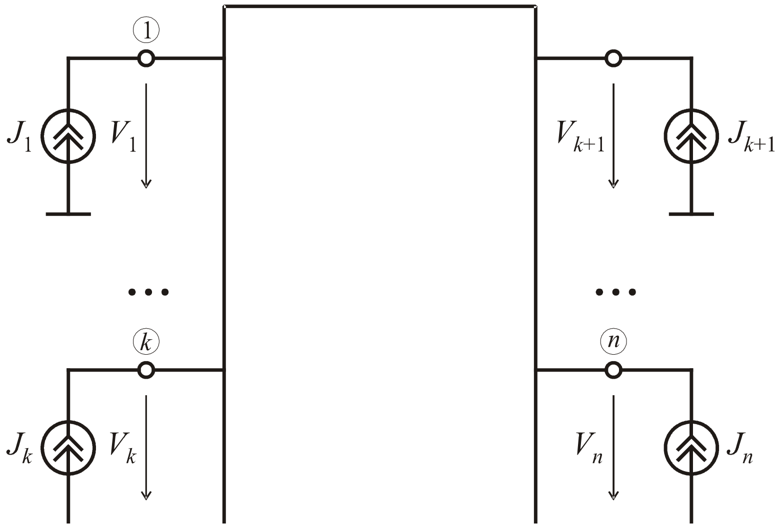


Рис. 4.1

Раскроем определитель D_k по элементам *k*-го столбца:

$$V_k = \frac{D_k}{D} = \sum_{i=1}^{n} R_{ik} J_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+k} D_{ik}}{D} J_i \,. \qquad (4.2)$$

Здесь D_{ik} – минор элемента g_{ik}, который представляет определитель порядка $(n-1)$, получающийся при вычеркивании в определителе D_k *i*-й строки и *k*-го столбца.

Коэффициенты $R_{ik} = \frac{(-1)^{i+k} D_{ik}}{D}$ в уравнении (4.2) имеют размерность сопротивления. Эти коэффициенты называют входными (при $i = k$) и передаточными (при $i \neq k$) сопротивлениями. Для выяснения смысла этих названий рассмотрим цепь на рис. 4.2. Если все источники, за исключением J_i, удалить, то напряжение *k*-го узла

$$V_k = \frac{(-1)^{i+k} D_{ik}}{D} J_i \,.$$

Таким образом, передаточное сопротивление между *i*-м и *k*-м узлами

$$R_{ik} = \frac{V_k}{J_i} = \frac{(-1)^{i+k} D_{ik}}{D} \,.$$

При $i = k$ мы имеем входное сопротивление относительно *k*-го узла:

$$R_{kk} = \frac{V_k}{J_k} = \frac{D_{kk}}{D}.$$

Таким образом, принцип наложения является следствием линейности уравнений, описывающих цепь.

Принцип наложения имеет важнейшее значение в теории линейных цепей. Большинство методов анализа линейных цепей основано на этом принципе. Следует помнить, что для нелинейных цепей принцип наложения неприменим.

Одним из методов анализа, основанных на использовании принципа суперпозиции, является *метод наложения*. Он основан на определении токов или напряжений в одной и той же ветви при поочередном действии независимых источников и последующем сложении этих токов.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение метода наложения для расчета сложных цепей.

Пример 4.1. Рассчитать ток I_2 в схеме, показанной на рис. 4.2.

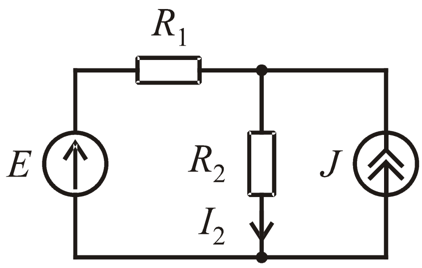


Рис. 4.2

Решение. Используем для расчета метод наложения. Рассмотрим две частных схемы (рис. 4.3, *а*, *б*), в каждой из которых действует только один источник.

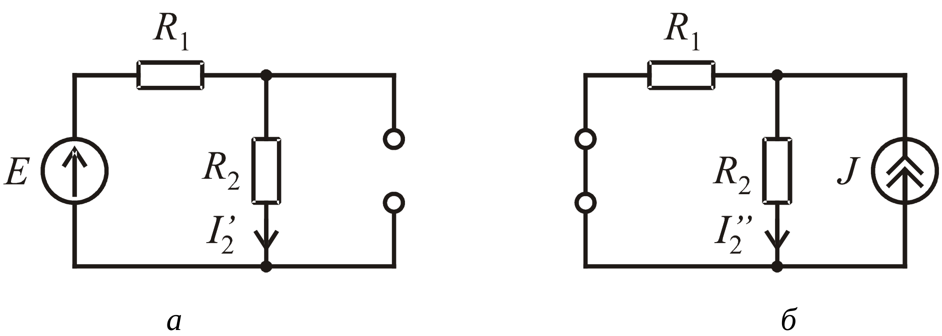


Рис. 4.3

Источник тока в схеме на рис. 4.3, а исключен, т.е. ток этого источника мы полагаем равным нулю. Поскольку внутреннее сопротивление источника тока бесконечно, мы заменяем его разрывом. Резисторы R_1 и R_2 в схеме на рис. 4.3, *а* соединены последовательно. Поэтому ток

$$I_2' = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

В схеме на рис. 4.3, *б* исключен источник напряжения. Поскольку внутреннее сопротивление источника напряжения равно нулю, мы заменяем его закороткой. Резисторы в схеме на рис. 4.3, *б* соединены параллельно, поэтому ток I_2'' мы найдем с помощью формулы разброса:

$$I_2'' = J\frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

В соответствии с принципом наложения ток в резисторе R_2

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{E}{R_1 + R_2} + J\frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

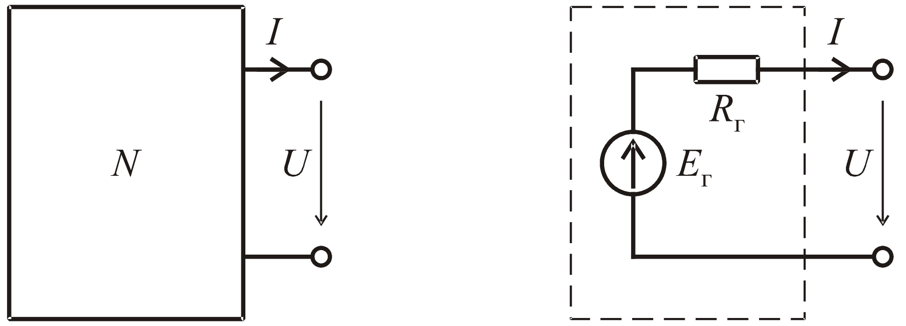
Подчеркнем, что исключению источника напряжения соответствует короткое замыкание его зажимов, а исключению источника тока – замена его разрывом.

Следует учитывать, что метод наложения можно использовать для определения величин, которые связаны между собой линейной зависимостью (например, токов и напряжений). В то же время его нельзя использовать для вычисления мощности линейной цепи, так как она связана с напряжением и током квадратичной зависимостью.

2. Теорема об эквивалентном двухполюснике

Часто при анализе электрических цепей требуется определить не все токи и напряжения, а ток или напряжение некоторого участка цепи. В этом случае удобно всю цепь, за исключением рассматриваемого участка, заменить простой эквивалентной схемой. Возможность такой замены устанавливает *теорема об эквивалентном двухполюснике*. Она формулируется следующим образом:

Линейную цепь с двумя внешними зажимами можно представить эквивалентной схемой, состоящей из последовательно соединенных независимого источника напряжения и резистора (рис. 4.4, а, б).



а *б*

Рис. 4.4

Напряжение источника равно напряжению холостого хода двухполюсника, а сопротивление резистивного элемента равно входному сопротивлению двухполюсника.

Поскольку напряжение источника равно напряжению холостого хода, сопротивление резистора (и, следовательно, входное сопротивление цепи) равно отношению напряжения холостого хода к току короткого замыкания:

$$R_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{хх}}}{I_{\text{кз}}}.$$

Эквивалентную схему на рис. 4.4, *б* называют *эквивалентным генератором напряжения* или *эквивалентной схемой Тевенина*. Такое название она получила по имени французского ученого Леонарда Тевенина, впервые сформулировавшего теорему об эквивалентном двухполюснике.

Аналогичным образом можно показать, что линейный двухполюсник можно представить эквивалентной схемой, состоящей из параллельно соединенных источника тока и резистора (рис. 4.5). Такую эквивалентную схему называют *эквивалентным генератором тока* или *схемой Нортона*.

Теорема Тевенина и Нортона имеет большое значение для анализа линейных цепей. Она позволяет заменить участок линейной цепи с двумя внешними зажимами простейшей эквивалентной схемой. При этом режим в остальной части цепи не изменится.

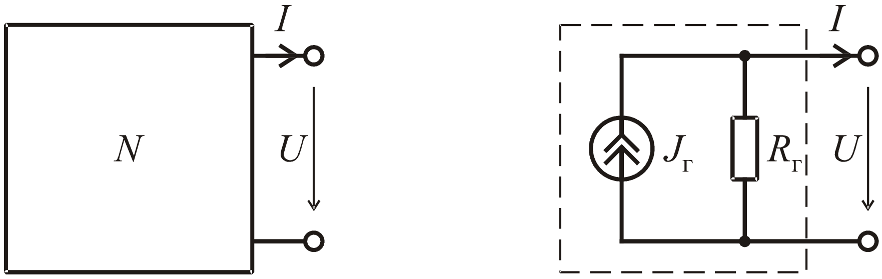


Рис. 4.5

Определение параметров двухполюсника, эквивалентного цепи с управляемыми источниками, следует рассмотреть особо. Из доказательства теорем Тевенина и Нортона следует, что при определении входного сопротивления мы исключаем только независимые источники. Управляемые источники, как и идеальные ОУ, исключать из исходной цепи не следует. Входное сопротивление такой цепи можно найти как отношение напряжения холостого хода и тока короткого замыкания. Таким образом, при определении параметров двухполюсной цепи с управляемыми источниками необходимо рассчитать эту цепь дважды:

1. Для определения напряжения холостого хода при разомкнутых внешних зажимах;
2. Для определения тока короткого замыкания при закороченных внешних зажимах.

3. Метод эквивалентного генератора

Теорема об эквивалентном двухполюснике используется в методе расчета, называемом *методом эквивалентного генератора*. Этот метод удобно использовать тогда, когда требуется рассчитать ток только в одной ветви сложной цепи.

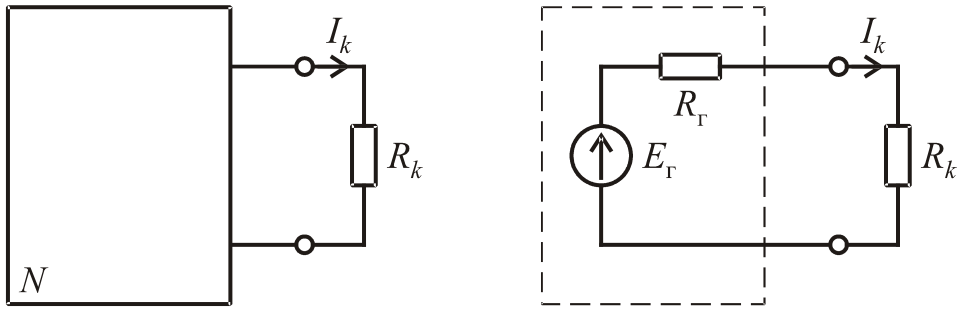
Выделим ветвь, в которой требуется найти ток, а остальную часть цепи заменим эквивалентным двухполюсником (рис. 4.6, *а*). Ток в схеме на рис. 4.6, *б*

$$I = \frac{E_г}{R_г + R_к}. \quad (4.3)$$

Расчет методом эквивалентного генератора проводится в следующей последовательности.

1. Выделяется ветвь, в которой необходимо рассчитать ток, а остальная часть цепи заменяется эквивалентным двухполюсником (рис. 4.6, б).
2. Определяются параметры эквивалентного двухполюсника $E_г$, $R_г$.

3. Искомый ток рассчитывается по формуле (4.3).



а *б*

Рис. 4.6

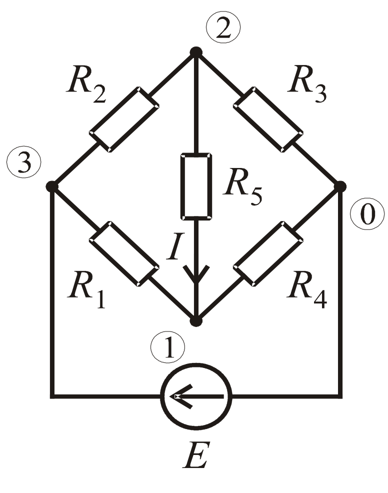
В заключение рассмотрим пример использования метода эквивалентного генератора для расчета разветвленных цепей.

Пример 4.2. Мост Уитстона, показанный на рис. 4.7, используется для измерения сопротивлений. Для ограничения тока нуль-индикатора последовательно с ним включен резистор R_5. Необходимо найти ток в диагональной ветви моста, если $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 90$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, $R_5 = 12$ Ом, $E = 120$ В.

Воспользуемся методом эквивалентного генератора. Разомкнем диагональную ветвь, а оставшуюся цепь представим эквивалентной схемой Тевенина (рис. 4.8). Тогда задача сводится к расчету тока в элементарной схеме на рис. 4.6, *б*.

Напряжение холостого хода в схеме на рис. 4.8 найдем из уравнения по второму закону Кирхгофа для контура, включающего резисторы R_1, R_2 и разомкнутую ветвь:

$$U_{хх} = R_1 I_1 - R_2 I_2 .$$



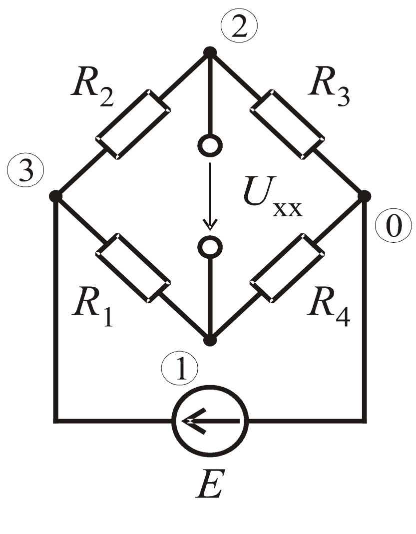


Рис. 4.7 Рис. 4.8

Токи I_1 и I_2 определим с помощью закона Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{120}{15+60} = 1.6\ \text{А};\ I_2 = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{120}{60+90} = 0.8\ \text{А}.$$

Итак, напряжение холостого хода

$$U_{\text{хх}} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)E = \left(\frac{15}{15+60} - \frac{60}{60+90}\right)\cdot 120 = -24\ \text{В}.$$

Входное сопротивление двухполюсника найдем, исключив из схемы источник напряжения:

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = \frac{15\cdot 60}{15+60} + \frac{60\cdot 90}{60+90} = 48\ \text{Ом}.$$

Таким образом, параметры эквивалентной схемы Тевенина

$$E_{\text{г}} = U_{\text{хх}} = -24\ \text{В},\ R_{\text{г}} = R_{\text{вх}} = 48\ \text{Ом}.$$

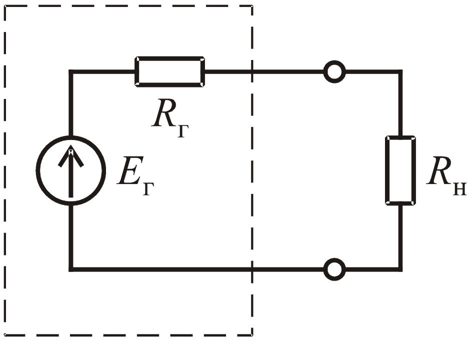
Искомый ток

$$I = \frac{E_{\text{г}}}{R_{\text{г}} + R_5} = \frac{-24}{48+12} = -0.4\ \text{А}.$$

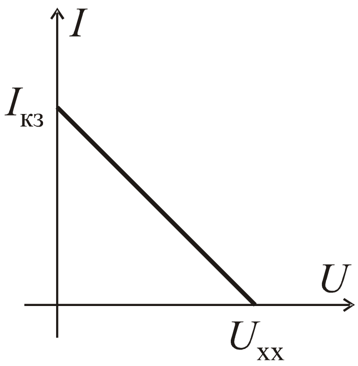
Метод эквивалентного генератора удобно использовать в тех случаях, когда необходимо определить ток только в одной ветви разветвленной цепи.

4. Характеристики эквивалентного двухполюсника

Рассмотрим двухполюсник, образованный последовательным соединением источника напряжения и линейного резистора (выделен пунктиром на рис. 4.9, *а*). Из теоремы Тевенина следует, что такой эквивалентной схемой может быть представлен любой линейный двухполюсник. К внешним зажимам двухполюсника подключено сопротивление нагрузки $R_{\text{н}}$.



а



б

Рис. 4.9

Ток в цепи

$$I = \frac{E}{R_г + R_н}.$$

Напряжение на зажимах двухполюсника

$$U_н = E_г - R_г I.$$

Вольт-амперная характеристика двухполюсника (для выбранных направлений напряжений и токов) показана на рис. 4.9, *б*. Ее называют *нагрузочной прямой*.

Если уменьшать сопротивление нагрузки, ток двухполюсника будет увеличиваться, а напряжение на внешних зажимах – уменьшаться. В пределе, когда сопротивление $R_н$ станет равным нулю, напряжение двухполюсника упадет до нуля, а ток достигнет максимального значения. Такой режим работы двухполюсника называют режимом *короткого замыкания*. Ток двухполюсника в этом режиме называют током короткого замыкания. Его величина ограничена только сопротивлением двухполюсника:

$$I_{кз} = \frac{E_г}{R_г}.$$

Если увеличивать сопротивление нагрузки, ток двухполюсника будет уменьшаться. В пределе при $R_н \to \infty$ ток $I = 0$. Такой режим двухполюсника называют режимом *холостого хода*. В этом режиме напряжение на внешних зажимах двухполюсника равно напряжению источника:

$$U_{хх} = E_г.$$

Рассмотрим теперь, как изменяется мощность, выделяемая в сопротивлении нагрузки при изменении $R_н$. Мощность, отдаваемая двухполюсником в сопротивление нагрузки

$$P_{\text{н}} = I^2 R_{\text{н}} = \frac{E_{\text{г}}^2 R_{\text{н}}}{\left(R_{\text{г}} + R_{\text{н}}\right)^2}. \qquad (4.4)$$

Мощность $P_{\text{н}}$ принимает нулевые значения в режимах холостого хода и короткого замыкания. При некотором значении $R_{\text{н}}$ мощность нагрузки принимает максимальное значение. Дифференцируя (4.4) и приравнивая производную нулю, найдем, что при $R_{\text{н}} = R_{\text{г}}$ двухполюсник отдает в нагрузку максимальную мощность:

$$P_{\text{н}\max} = \frac{E_{\text{г}}^2}{4R_{\text{г}}}.$$

Такой режим, когда сопротивления двухполюсника и нагрузки равны и двухполюсник отдает во внешнюю цепь максимальную мощность, называют *режимом согласованной нагрузки*.

При уменьшении сопротивления нагрузки мощность двухполюсника, определяемая формулой

$$P_{\text{г}} = E_{\text{г}} I = \frac{E_{\text{г}}^2}{R_{\text{г}} + R_{\text{н}}},$$

будет расти. В режиме холостого хода $P = 0$. Максимальной мощность двухполюсника будет в режиме короткого замыкания:

$$P_{\max} = \frac{E_{\text{г}}^2}{R_{\text{г}}}.$$

Мощность, теряемая внутри двухполюсника, также растет при уменьшении сопротивления нагрузки:

$$\Delta P = R_{\text{г}} I^2 = \frac{R_{\text{г}} E_{\text{г}}^2}{\left(R_{\text{г}} + R_{\text{н}}\right)^2}.$$

Коэффициент полезного действия рассматриваемой цепи равен отношению мощности, выделяемой в нагрузке, к мощности, развиваемой двухполюсником:

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{г}}} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{г}} + R_{\text{н}}}.$$

Из последнего соотношения следует, что в режиме согласованной нагрузки КПД $\eta = 50\,\%$. Иными словами, в таком режиме половина мощности теряется в двухполюснике. Такой режим допустим в цепях малой мощности, когда потерями можно пренебречь. В цепях большой мощности режим согласованной нагрузки не используется, так как КПД слишком мал. Кроме того, в генераторах большой мощности ток, равный $E/2R$, обычно значительно превышает допустимый ток генератора. Для увеличения коэффициента полезного действия выбирают $R_н > R_г$.

5. Заключение

1. Принцип наложения является фундаментальным свойством линейных цепей: реакция линейной цепи при одновременном действии нескольких независимых источников равна сумме реакций, получающихся при действии каждого источника в отдельности.
2. Метод наложения основан на определении токов или напряжений в одной и той же ветви при поочередном действии независимых источников и последующем сложении этих токов.
3. Теорема об эквивалентном двухполюснике: Линейную цепь с двумя внешними зажимами можно представить эквивалентной схемой, состоящей из последовательно соединенных независимого источника напряжения и резистора. Напряжение источника равно напряжению холостого хода двухполюсника, а сопротивление резистивного элемента равно входному сопротивлению двухполюсника.
4. Теорема об эквивалентном двухполюснике используется в методе расчета, называемом методом эквивалентного генератора. Этот метод удобно использовать тогда, когда требуется рассчитать ток только в одной ветви разветвленной цепи.
5. Режим работы эквивалентного двухполюсника, при котором сопротивления двухполюсника и нагрузки равны, и двухполюсник отдает во внешнюю цепь максимальную мощность, называют режимом согласованной нагрузки. В режиме согласованной нагрузки коэффициент полезного действия $\eta = 50\,\%$, т.е. половина мощности теряется в двухполюснике.