

Раздел 7. Исследование аналоговых фильтров

7.1. Аппроксимация амплитудно-частотных характеристик аналоговых фильтров

Процедура синтеза электронного фильтра включает два основных этапа. Первым этапом является *аппроксимация* – процедура получения передаточной функции, с заданной точностью воспроизводящей заданные частотные или временные характеристики. Передаточная функция, найденная на этапе аппроксимации, затем реализуется электрической цепью.

Наиболее распространенными видами передаточных функций, используемых для получения заданных амплитудно-частотных характеристик, являются функции Баттерворта и Чебышева.

Фильтры Баттерворта. Передаточная функция фильтра нижних частот Баттерворта n -го порядка характеризуется выражением

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}. \quad (7.1)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта обладает следующими свойствами:

1. При любом порядке n значение АЧХ $|H(j0)| = 1$.
2. На частоте среза ω_c $|H(j\omega_c)| = 0.7$.

АЧХ фильтра монотонно убывает с ростом частоты. По этой причине фильтры Баттерворта называют фильтрами с максимально плоскими характеристиками. На рис. 15.4 показаны графики амплитудно-частотных характеристик фильтров Баттерворта 3 и 5 порядков. Очевидно, что чем больше порядок фильтра, тем точнее аппроксимируется АЧХ идеального фильтра нижних частот.

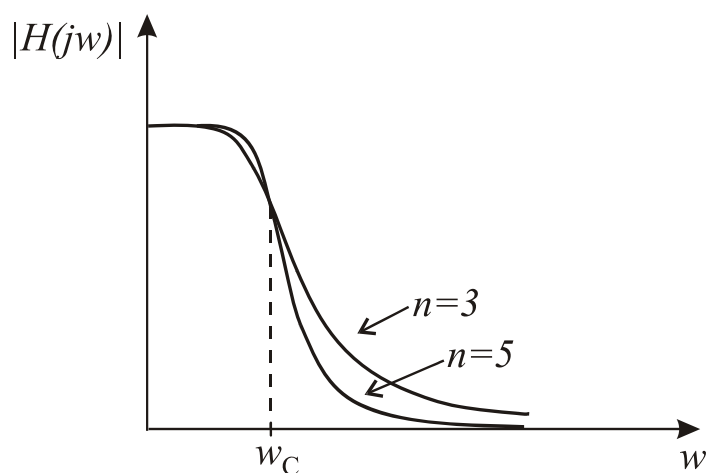


Рис. 7.1

Порядок передаточной функции n выбирают из условия обеспечения требуемого затухания в полосе задерживания на частоте $\omega > \omega_c$. Модуль передаточной функции в полосе задерживания

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \approx \frac{1}{\omega^n}.$$

Порядок передаточной функции определяется приближенной формулой

$$n = 20 \lg |H(j\omega)| / 20 \lg(\omega/\omega_c). \quad (7.2)$$

Здесь ω – частота в полосе задерживания, на которой задана величина затухания. Значение n , полученное с помощью формулы (15.5), округляется до ближайшего целого, большего n .

Пример 7.1. Определить порядок фильтра Баттерворта, у которого значение АЧХ на частоте, равной $2\omega_c$, не превышает 0.01.

Решение. В соответствии с (7.2) $n = 20 \lg 0.1 / 20 \lg(2) = 3.32$. Округляя до ближайшего большего целого, получаем, что такое ослабление в полосе задерживания обеспечивает фильтр Баттерворта четвертого порядка.

Определяем координаты полюсов фильтра Баттерворта, полагая в (15.4) $\omega^2 = -p^2$:

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}}.$$

Приравняв полином знаменателя нулю, найдем, что полюсы фильтра Баттерворта с частотой среза $\omega_c = 1$ рад/с расположены на окружности единичного радиуса на одинаковом угловом расстоянии друг от друга:

$$p_k = -\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Каждая пара комплексных сопряженных полюсов образует множитель

$$p^2 + p \cdot 2 \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + 1.$$

Фильтры Чебышева. Квадрат модуля передаточной функции фильтра Чебышева определяется выражением

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}. \quad (7.3)$$

Здесь $T_n(\omega)$ - полином Чебышева. Модуль передаточной функции фильтра Чебышева равен единице на тех частотах, где $T_n(\omega)$ обращается в нуль. График амплитудно-частотной характеристики фильтра Чебышева пятого порядка показан на рис. 7.3.

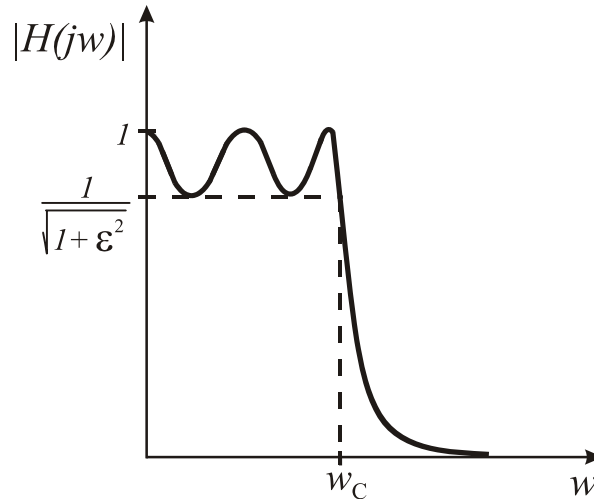


Рис. 7.3

Перечислим свойства частотных характеристик фильтров Чебышева.

1. В полосе пропускания АЧХ имеет равноволновой характер. На интервале $-1 \leq \omega \leq 1$ имеется n точек, в которых функция $|H(j\omega)|^2$ достигает максимального значения, равного 1, или минимального значения, равного $1/(1 + \epsilon^2)$. Если n нечетно, $|H(j0)|^2 = 1$, если n четно, $|H(j0)| = 1/\sqrt{(1 + \epsilon^2)}$.

2. Значение АЧХ фильтра Чебышева на частоте среза равно

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}.$$

3. При $\omega \geq 1$ функция $|H(j\omega)|^2$ монотонно убывает и стремится к нулю.

4. Параметр ϵ определяет неравномерность АЧХ фильтра Чебышева в полосе пропускания:

$$A_{\max} = 10 \lg(1 + \epsilon^2).$$

Сравнение АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева показывает, что фильтр Чебышева обеспечивает большее ослабление в полосе пропускания, чем фильтр Баттерворта такого же

порядка. Недостаток фильтров Чебышева заключается в том, что их фазочастотные характеристики в полосе пропускания значительно отличаются от линейных.

Для фильтров Баттерворта и Чебышева имеются подробные таблицы, в которых приведены координаты полюсов и коэффициенты передаточных функций различных порядков.

7.2. Пассивные LC-фильтры

LC-фильтры были первыми фильтрами, которые использовались в устройствах передачи сигналов.

Пассивный фильтр, реализующий характеристики Баттерворта или Чебышева, представляет лестничную LC-цепь, включенную между резистивным сопротивлением источника сигнала и нагрузкой R_H (рис. 7.4). Элементы фильтра рассчитывают таким образом, чтобы обеспечить передачу максимальной мощности в полосе пропускания.

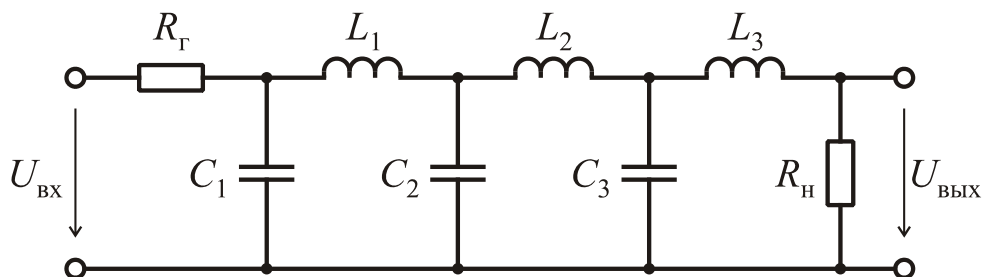


Рис. 7.4

С помощью лестничной LC-цепи можно реализовать только передаточные функции, нули передачи которых расположены на мнимой оси. Однако это не является серьезным ограничением, так как нули передачи частотно-селективных фильтров, как правило, расположены на мнимой оси, включая начало координат и бесконечность.

В простейшем случае нули передачи находятся в бесконечности. Таким свойством обладают передаточные функции фильтров нижних частот Баттерворта и Чебышева. Продольные ветви LC-цепи содержат индуктивности, а поперечные – емкости. Если нули передачи расположены в начале координат (фильтр верхних частот), то продольные ветви содержат емкостные элементы, а поперечные – индуктивные. Отличие фильтров Баттерворта и Чебышева в этом случае заключается только в разных значениях реактивных элементов, получаемых в процессе расчета. Количество реактивных элементов определяется порядком фильтра n .

Методы синтеза LC -фильтров хорошо разработаны. Существует обширная справочная литература, которая содержит данные о фильтрах различных порядков. Процедура расчета фильтра сводится к выбору типа и порядка фильтра.

Пассивные фильтры устойчивы, не требуют источников питания, имеют низкую чувствительность характеристик к изменениям номиналов элементов. Их основной недостаток при работе на частотах меньше 100 МГц – большие габариты и вес, обусловленные размерами индуктивных катушек.

В настоящее время во многих областях радиоэлектроники LC -фильтры почти вытеснены цифровыми и аналоговыми активными RC -фильтрами. Однако пассивные фильтры по-прежнему используются на частотах, превышающих 100 кГц.

Таблица 7.1

Значения элементов фильтров Баттерворта

n	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9
2	1,4142	1,4142							
3	1,0000	2,0000	1,0000						
4	0,7654	1,8478	1,8478	0,7654					
5	0,6180	1,6180	2,0000	1,6180	0,6180				
6	0,5176	1,4142	1,9319	1,9319	1,4142	0,5176			
7	0,4450	1,2470	1,8019	2,0000	1,8019	1,2470	0,4450		
8	0,3902	1,1111	1,6629	1,9616	1,9616	1,6629	1,1111	0,3902	
9	0,3473	1,0000	1,5321	1,8794	2,0000	1,8794	1,5321	1,0000	0,3473

Таблица 7.2.

Значения элементов фильтров Чебышева
при $A_{\text{макс}} = 1$ дБ

n	R_l	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9
2	0,25	3,7779	0,3001							
3	1,00	2,0236	0,9941	2,0236						
4	0,25	4,5699	0,5428	5,3680	0,3406					
5	1,00	2,1349	1,0911	3,0009	1,0911	2,1349				
6	0,25	4,7366	0,5716	6,0240	0,5764	5,5353	0,3486			
7	1,00	2,1666	1,1115	3,0936	1,1735	3,0936	1,1115	2,1666		
8	0,25	4,7966	0,5803	6,1592	0,6005	6,1501	0,5836	5,5869	0,3515	
9	1,00	2,1797	1,1192	3,1214	1,1897	3,1746	1,1897	3,1214	1,1192	2,1797

Методы проектирования аналоговых фильтров с типовыми амплитудно-частотными характеристиками хорошо разработаны. Имеются многочисленные справочники, в которых приведены подробные таблицы с

параметрами фильтров различных порядков. В табл. 7.1 и 7.2 приведены значения элементов нормированных фильтров Баттерворта и Чебышева с частотой среза 1 рад/с.

7.4. Частотные преобразования

Как уже отмечалось, существуют многочисленные справочники, в которых приведены параметры фильтров, реализующих передаточные функции различных видов. Обычно это НЧ-структуры с частотой среза 1 рад/с. На практике такие фильтры совершенно бесполезны, так как для того или иного конкретного применения необходимы фильтры различных типов с частотами среза от единиц герц до сотен килогерц. Для получения фильтров с требуемыми характеристиками используют процедуру преобразования частоты. Исходный ФНЧ с частотой среза 1 рад/с является *НЧ-прототипом*. Частотное преобразование заключается в замене комплексной частотной переменной p на новую переменную. С помощью частотных преобразований из нормированного НЧ-прототипа получают фильтры различных типов с требуемой частотой среза. Рассмотрим некоторые из этих преобразований.

Преобразование НЧ–НЧ. Предположим, что нам необходим ФНЧ с частотой среза $\omega_c = 2\pi f_c \neq 1$ рад/с. Заменим частотную переменную в передаточной функции НЧ-прототипа на новую переменную

$$s = \frac{p}{\omega_c}. \quad (7.4)$$

Это равносильно замене катушки, индуктивность которой равна L генри, катушкой индуктивностью $L' = L/\omega_c$ генри. Конденсатор емкостью C фарад заменяется конденсатором $C' = C/\omega_c$ фарад. Сопротивления элементов денормированного фильтра на частоте ω/ω_c будут такими же, как у нормированного фильтра на частоте ω . Следовательно, преобразование (7.5) приведет к изменению масштаба по оси частот, и частота среза денормированного фильтра станет равна ω_c .

Преобразование НЧ–ВЧ. В этом случае преобразование имеет вид

$$s = \frac{\omega_c}{p}.$$

Здесь ω_c – частота среза фильтра верхних частот. При таком преобразовании передаточная функция ФНЧ-прототипа преобразуется в передаточную функцию ФВЧ с частотой среза ω_c . При этом конденсаторы заменяются

катушками, индуктивность которых равна $L' = 1/C\omega_c$ генри. Аналогично катушки заменяются конденсаторами емкостью $C' = 1/L\omega_c$ фарад.

Преобразование НЧ–ПФ. Это частотное преобразование трансформирует ФНЧ с одной полосой задерживания в полосовой фильтр с двумя полосами задерживания (рис. 15.7).

Преобразование ФНЧ-ПФ выполняется по формуле

$$s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{Bp}. \quad (7.5)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$ – центральная частота полосы пропускания; ω_{c1} , ω_{c2} – нижняя и верхняя частоты среза; $B = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ – ширина полосы пропускания.

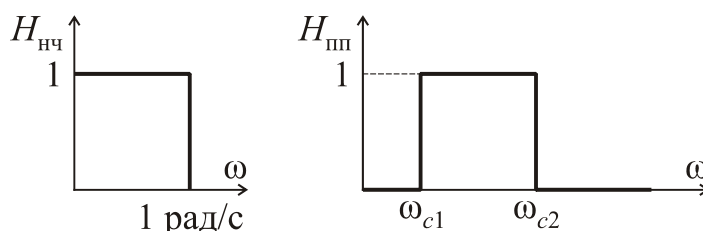


Рис. 7.5

Передаточная функция полосового фильтра, получаемая с помощью преобразования (7.5), имеет вдвое больший порядок, чем передаточная функция НЧ-прототипа.

Преобразование можно применить как к передаточной функции, так и к схеме исходного ФНЧ. При этом индуктивная катушка преобразуется в последовательное соединение катушки и конденсатора. Действительно, в соответствии с (15.8)

$$sL = \frac{p^2 + \omega_0^2}{Bp} L = \frac{p}{B} L + \frac{\omega_0^2}{Bp} L.$$

Этому равенству соответствует цепь, образованная последовательным соединением катушки индуктивностью L/B генри и конденсатора емкостью BL/ω_0^2 фарад. Аналогично конденсатор в ФНЧ-прототипе преобразуется в параллельную цепь, состоящую из конденсатора емкостью C/B фарад и катушки индуктивностью $B/C\omega_0^2$ генри. В последних соотношениях C – емкость конденсатора в схеме НЧ-прототипа.

Нормирование по сопротивлению. В схемах НЧ-прототипа используются резисторы сопротивлением 1 Ом. Ясно, что на практике требуются фильтры с различными сопротивлениями нагрузки и генератора. При нормировании уровня сопротивления номиналы всех элементов схемы изменяют в определенное число раз. Например, если сопротивление нагрузочного резистора увеличивается в A раз, то индуктивности катушек также необходимо увеличить в A раз, а емкости конденсаторов – уменьшить в A раз. При этом частотные характеристики фильтра не изменятся.

7.5. Активные RC-фильтры

Основной недостаток LC -фильтров, работающих в диапазоне частот менее 50 кГц – большие габариты и вес, обусловленные значительными размерами индуктивных катушек на этих частотах.

Этого недостатка лишены активные RC -фильтры. Такой фильтр содержит резисторы, конденсаторы и активные элементы (как правило, операционные усилители). Активные фильтры широко используют в геофизической, медицинской аппаратуре, устройствах связи. В простых случаях активный фильтр представляет каскадное соединение звеньев второго-первого порядков (рис. 7.6).

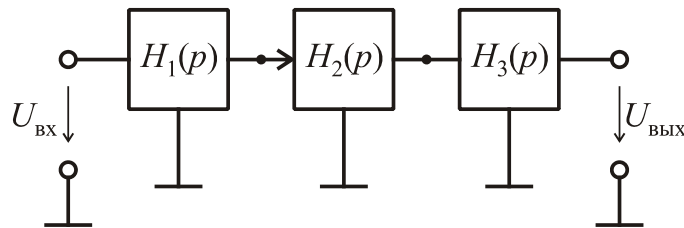


Рис. 7.6

Передаточная функция такого фильтра представляет произведение сомножителей второго порядка:

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdots$$

Преимущества каскадной реализации заключаются в простоте расчета и настройки фильтра.

Рассмотрим подробнее передаточные функции звеньев второго порядка. В общем случае передаточная функция звена имеет вид

$$H(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2}.$$

Параметры ω_p и Q_p определяют полюсы передаточной функции:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_p}{2Q_p} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4Q_p^2}\right)}.$$

При $Q_p > 0.5$ полюсы $p_{1,2}$ комплексно-сопряженные. Параметр ω_p называют *частотой*, а Q_p – *добротностью реализуемой пары полюсов*.

Коэффициенты числителя передаточной функции определяют расположение нулей передачи и соответственно тип передаточной функции. Передаточную функцию фильтра нижних частот получим, предположив $a_2 = a_1 = 0$:

$$H_{\text{нч}}(p) = \frac{a_0}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2}.$$

Нули передачи фильтра верхних частот расположены в начале координат, поэтому

$$H_{\text{вч}}(p) = \frac{a_2 p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2}.$$

Передаточная функция полосно-пропускающего фильтра

$$H_{\text{пп}}(p) = \frac{a_1 p}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2}.$$

В практике проектирования активных фильтров используется большое число схем, реализующих передаточные функции первого и второго порядков. Простейшими являются схемы на одном ОУ с положительной обратной связью. На рис. 7.7 показан фильтр нижних частот Саллена – Ки.

Он назван так по фамилиям инженеров П. Саллена и Э. Ки, предложивших первые практические схемы активных фильтров.

Операционный усилитель, резисторы R_3 и R_4 реализуют неинвертирующий усилитель с коэффициентом усиления $K = (R_3 + R_4)/R_4$. Передаточная функция фильтра

$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K/R_1 R_2 C_1 C_2}{p^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} (1 - K) \right) p + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Для реализации фильтра верхних частот необходимо поменять местами резисторы R_1 , R_2 и конденсаторы C_1 , C_2 . Достоинства фильтра Саллена – Ки – простота структуры, минимальное число активных элементов. Последнее особенно важно в тех случаях, когда необходимо уменьшить мощность, потребляемую фильтром.

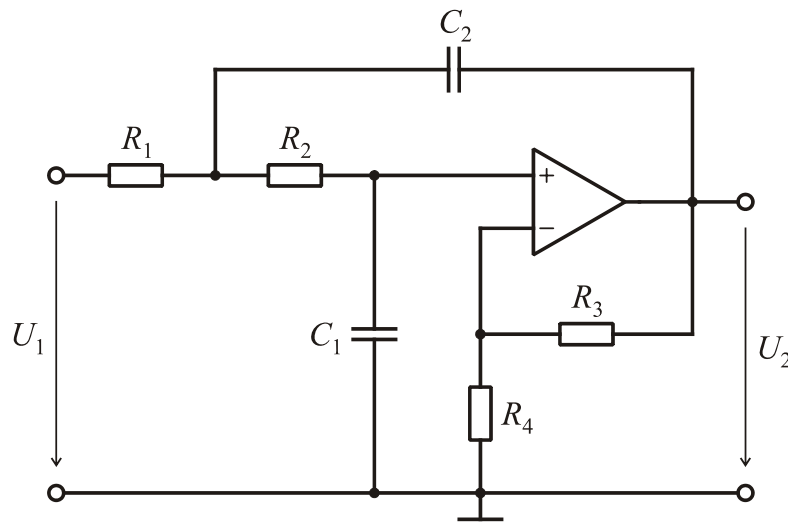


Рис. 7.7

В настоящее время разработаны различные процедуры расчета элементов фильтров Саллена – Ки. Приведем один из вариантов, обеспечивающий равенство номиналов элементов. Исходными данными являются частота ω_p и добротность полюсов Q_p . Расчет проводится в следующем порядке.

1. Выбираем подходящие номиналы конденсаторов $C_1 = C_2 = C$.
2. Сопротивления резисторов R_1 и R_2 определяем по формуле

$$R_1 = R_2 = 1/\omega_p C.$$

Коэффициент передачи усилителя

$$K = 3 - 1/Q_p.$$

Пример 7.2. Рассчитать фильтр нижних частот второго порядка, имеющий параметры: частота $f_p = 1$ кГц, добротность полюсов $Q_p = 0.707$.

Решение. Выбираем $C_1 = C_2 = 10$ нФ. Сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = 1/2\pi f_p C = 1/(2\pi \cdot 1 \cdot 10) = 15.9$ кОм. Коэффициент усилителя $K = 3 - 1/Q_p = 3 - 1/0.707 = 1.586$.

Для реализации передаточных функций полосно-пропускающих фильтров с невысокой добротностью полюсов ($Q_p \leq 10$) используют звенья с многопетлевой обратной связью (рис. 7.8).

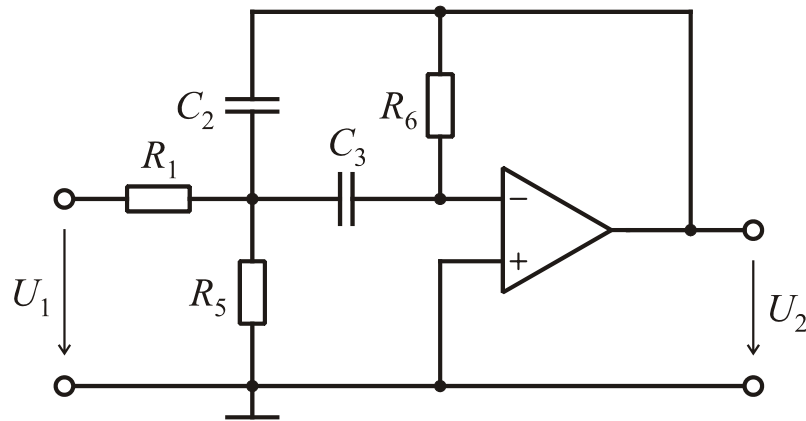


Рис. 7.8

Передаточная функция фильтра, показанного на рис. 7.8,

$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{p/R_1 C_2}{p^2 + (1/R_6 C_2 + 1/R_6 C_3)p + (1/R_1 + 1/R_5)/R_6 C_2 C_3}.$$

Расчет элементов схемы проводится в следующем порядке.

1. Выбираем подходящие значения емкостей $C_2 = C_3 = C$.
2. Сопротивления резисторов рассчитываем по формулам:

$$R_1 = Q_p / \omega_p C H_0; \quad R_5 = Q_p / (2Q_p^2 - H_0) \omega_p C; \quad R_6 = 2Q_p / \omega_p C.$$

В последних соотношениях H_0 – коэффициент передачи на частоте ω_0 . Для упрощения схемы можно исключить резистор R_5 , заменив его разрывом. Однако при этом нельзя будет контролировать коэффициент H_0 .

С помощью звеньев на одном ОУ можно реализовать и передаточные функции второго порядка с нулями передачи на мнимой оси. Однако такие звенья содержат большое число пассивных элементов. В частности, число конденсаторов может достигать трех-четырех. Значительно сложнее и процедуры расчета таких звеньев.

Главным недостатком звеньев на одном ОУ является высокая чувствительность характеристик к изменениям коэффициента усиления активного элемента. Особенно сильно это проявляется при реализации высокодобротных полюсов. В таких случаях используют звенья на нескольких ОУ. Их основные преимущества перед звеньями на одном ОУ заключаются в меньшей чувствительности характеристик, простоте регулировки и настройки. К тому же с точки зрения технологии интегральных схем минимизировать число активных элементов нецелесообразно. Поэтому звенья на нескольких ОУ часто оказываются более предпочтительными.

Универсальное звено на трех ОУ, реализующее одновременно передаточные функции ФНЧ, ФВЧ и ПФ, показано на рис. 7.9. Схема звена содержит два интегратора и сумматор. В зависимости от того, какой узел используется в качестве выходного, можно реализовать одну из трех передаточных функций:

$$H_{\text{нч}} = \frac{U_3}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \frac{1}{R_8R_9C_1C_2p^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_9C_2p + \frac{R}{R_3}}; \quad (7.6a)$$

$$H_{\text{пф}} = \frac{U_2}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \frac{-C_2R_9p}{R_8R_9C_1C_2p^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_9C_2p + \frac{R}{R_3}}; \quad (7.6б)$$

$$H_{\text{вч}} = \frac{U_1}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \frac{C_1C_2R_8R_9p^2}{R_8R_9C_1C_2p^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_9C_2p + \frac{R}{R_3}}. \quad (7.6в)$$

Звенья на трех ОУ используют в универсальных модулях, изготавливаемых в виде интегральных схем. Такой модуль включает ОУ, конденсаторы и резисторы. Микросхема содержит внешние выводы для подключения источника питания, источника входного сигнала, а также регулировочных резисторов. С помощью таких резисторов можно

регулировать характеристики фильтра (частоту ω_p и добротность полюсов Q_p). Модуль позволяет реализовать любую из передаточных функций (7.6).

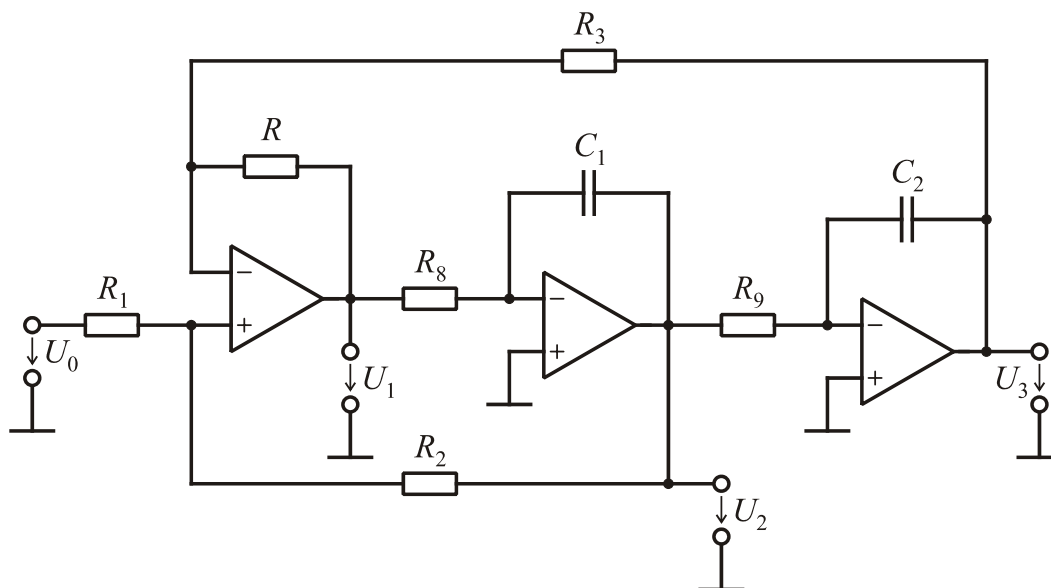


Рис. 7.9

Рекомендации по сборке схем

При сборке схем активных фильтров использовать модели операционных усилителей LM324 или uA741 из библиотеки EVAL.slb. Примеры схем фильтров можно найти в файлах W7_2_1, W7_2_2, W7_2_3 в папке Electronics\Labs.

Рекомендуемая литература

1. Хоровиц, П. Искусство схемотехники / П. Хоровиц, У. Хилл: пер. с англ. – 6-е изд. – М.: Мир, 2003. – 704 с., ил.
2. Сиберт, У. М. Цепи, сигналы, системы: в 2 ч.: пер. с англ. / У. М. Сиберт. – М.: Мир, 1988.
3. Хьюлсман, Л. Введение в теорию и расчет активных фильтров: пер. с англ. / Л. Хьюлсман, Ф. Аллен. – М.: Радио и связь, 1984. – 384 с.
4. Мошиц Г. П. Проектирование активных фильтров: пер. с англ. / Г. Мошиц, П. Хорн. – М.: Мир, 1984. – 320 с.
5. Довгун, В. П. Электротехника и электроника: учеб. пособие: в 2-х ч. Ч. 2 / В. П. Довгун. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2006. – 252 с.